



RASC

Real Academia
Sevillana de Ciencias

Newton, Euler, Navier, Stokes y lo de hoy

discurso pronunciado por el

Ilmo. Sr. D.

Enrique Fernández Cara

en el acto de recepción como académico numerario

el día 25 de abril de 2017

y

contestación del académico numerario

Excmo. Sr. D.

Rafael Infante Macías

NEWTON, EULER, NAVIER, STOKES Y LO DE HOY

*Discurso pronunciado por el Ilmo. Sr. D. Enrique Fernández Cara
en el Acto de su recepción como Académico Numerario
de la Real Academia Sevillana de Ciencias
celebrado el día 25 de abril de 2017.*

1. INTRODUCCIÓN

Sr. Presidente, señores académicos, queridos amigos, señoras y señores:

Siento un gran honor por haber sido elegido para formar parte de esta institución y tener la oportunidad de colaborar y aprender de sus miembros. Quiero expresar por ello mi agradecimiento más sincero. Intentaré corresponder a este nombramiento participando en las actividades de la Academia e impulsando las mismas en la medida que me resulte posible.

Debo comenzar este discurso dando las gracias a todos aquellos que me han ayudado a llegar hasta aquí. En primer lugar, al que fue mi primer maestro, el Profesor D. Antonio Valle, desgraciadamente ya desaparecido, a quien en mi opinión no sólo yo sino tantos de nosotros debemos tantas cosas. También, a mis otros profesores D. Antonio Castro y D. Rafael Infante, que me hace el honor de contestar a mi discurso.

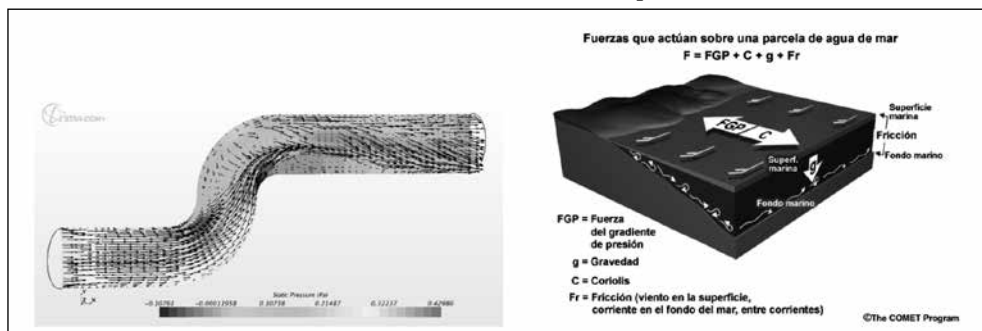
El profesor Infante, que es como yo natural de Jerez de la Frontera, me enseñó los fundamentos del cálculo de probabilidades y la Estadística matemática. El propició mi primer contacto con los procesos estocásticos y otras herramientas que me permitieron mucho tiempo después interesarme, ocasionalmente, por el control de las ecuaciones estocásticas en derivadas parciales.

Gracias al Profesor Valle, tras terminar la Licenciatura, conseguí una beca del Gobierno Francés que me permitió realizar el Doctorado en la Universidad París 6. Allí tuve como directores a personas de una categoría científica excepcional, los profesores Roland Glowinski y Henri Berestycki. Conseguí estar cerca de otros profesores e investigadores de primera línea de los que aprendí enormemente, mucho más de lo que podría haber imaginado. Entre otros, aprendí del inimitable Profesor Jacques-Louis Lions, un verdadero ejemplo de científico, gestor y persona. Y fui capaz de establecer contactos con muchos colegas con los que he conseguido seguir trabajando hasta el día de hoy.

Debo también muchas cosas a no pocos compañeros de la Universidad de Sevilla. En particular, a todos los miembros del Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico. Pero también a muchos otros colegas de otros Departamentos. Quiero mencionar con carácter especial a los miembros del Instituto de Matemáticas, un organismo relativamente nuevo pero de una gran visibilidad, agilidad, eficiencia y valor científico al cual pertenezco y con el que me siento muy comprometido.

A lo largo de todos estos años, he tenido la gran suerte de conocer investigadores de un buen número de universidades y organismos españoles y extranjeros. Con muchos de ellos he colaborado a nivel científico, lo que ha conducido a la publicación de artículos, la participación en congresos y seminarios y, también, a la dirección conjunta de Tesis Doctorales. Esto me ha permitido avanzar en el conocimiento y aumentar el interés por temas diversos, por lo que estoy muy agradecido.

FIGURA 1
EL FLUJO DE UN FLUIDO DE NAVIER-STOKES EN UN CONDUCTO Y EL FLUJO DEL AGUA DE MAR CERCA DE LA COSTA, TOMADO DE <https://www.meted.ucar.edu/oceans/>



Finalmente, a título personal, quiero expresar mi agradecimiento a Rosa Echevarría, mi esposa, colega y compañera y al resto de mi familia por su apoyo, que ha sido constante y decisivo y por su ayuda en múltiples tareas.

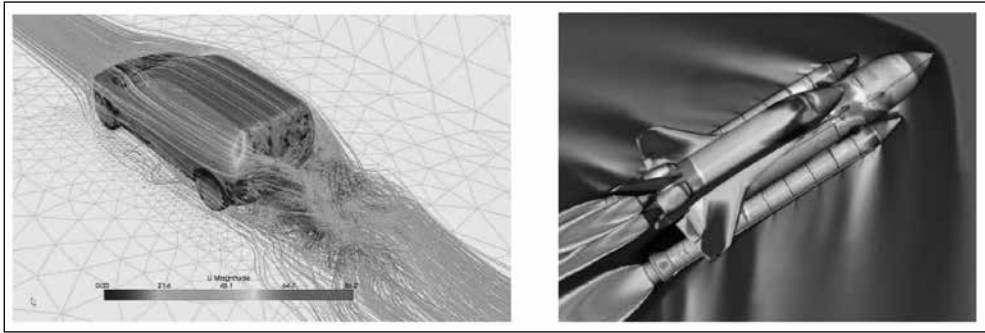
- Siempre he creído que nuestras actividades, como universitarios, deben estar guiadas por varios principios. Son los siguientes:
- En primer lugar, debemos enseñar. Al fin y al cabo, eso es principalmente lo que la sociedad espera de nosotros. Debemos ser capaces de educar y entrenar estudiantes y jóvenes investigadores tanto como podamos. Así conseguiremos nuestro estímulo y, tal vez, nuestro legado.
- En segundo lugar, debemos colaborar, trabajar en equipo y fomentar el espíritu colectivo. Hoy día, parece poco adecuado aislarse y abordar la resolución de problemas sin contar con las aportaciones de otros. Muy probablemente, no será así como consigamos las mejores contribuciones posibles.
- Finalmente, debemos progresar. Y entiendo este término en el sentido más amplio posible: progreso en nuestra actividad científica, progreso en la elección de temas de trabajo y también progreso en nuestra contribución al rendimiento de las instituciones. Debemos ser sensibles a los cambios que nuestras instituciones necesitan y tenemos que ayudar a que éstas evolucionen y consigan sus objetivos.

2. ORIGEN Y SIGNIFICADO DE LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

Para este discurso de ingreso, he decidido hablar sobre las ecuaciones de Navier-Stokes. Como todos ustedes saben, permiten modelar (esto es, representar y describir con herramientas matemáticas) el comportamiento de un fluido en condiciones aceptablemente realistas.

Estas ecuaciones gobiernan la atmósfera terrestre, las corrientes oceánicas, el flujo alrededor de vehículos o proyectiles y, en general, cualquier fenómeno en el que estén involucrados fluidos Newtonianos.

FIGURA 2
EL FLUJO DE UN FLUIDO DE NAVIER-STOKES ALREDEDOR DE UN OBSTÁCULO
(FIGURAS TOMADAS DE <https://secretofflight.wordpress.com/turbulence/> y <https://www.researchgate.net/>)



Intentaré huir de aspectos técnicos. En el caso más sencillo posible, para un fluido viscoso Newtoniano, incompresible y homogéneo, las ecuaciones de Navier-Stokes constituyen un sistema de ecuaciones en derivadas parciales no lineales

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{cases}$$

que escribiremos abreviadamente

$$\begin{cases} E_1(\mathbf{u}, p) = \mathbf{f} \\ E_2(\mathbf{u}) = 0, \end{cases}$$

donde $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ es el campo de velocidades del fluido y p es la presión a la que están sometidas las partículas (véase la Sección 5 para más detalles).

En (1), $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ es un campo de fuerzas exteriores. La ecuación $E_1(\mathbf{u}, p) = \mathbf{f}$ indica que la variación en el tiempo de la cantidad de movimiento asociada a cada par-

tícula a lo largo de su trayectoria coincide con la resultante de las fuerzas que actúan sobre ella; se trata por tanto de una versión de la segunda *ley de Newton*. La segunda ecuación, $E_2(\mathbf{u}) = 0$, nos dice que el volumen ocupado por una familia de partículas no cambia en el tiempo; en otras palabras, el fluido es incompresible.

Estas ecuaciones se deben resolver en la región del espacio que ocupan las partículas durante un intervalo de tiempo. Es usual complementarlas con informaciones adicionales. Generalmente, se añade una condición inicial, esto es, se fijan los valores de $\mathbf{u}$ en el instante inicial $t = 0$; también, se suelen imponer condiciones de contorno, es decir, se dice cómo se comporta $\mathbf{u}$ cuando nos acercamos al borde de la región ocupada por el fluido (y eventualmente, si la región no es acotada, cuando nos alejamos hacia el infinito).

En ocasiones, se consideran soluciones que sólo dependen de dos variables espaciales. Por ejemplo, si $f_3 = 0$, tiene sentido buscar soluciones que verifiquen $\partial_3 \mathbf{u} = 0$, $\partial_3 p = 0$ y $u_3 = 0$; esto quiere decir que, para la descripción del fluido, basta analizar su comportamiento sobre una sección horizontal.

2.1. Newton

Las partículas de un fluido están sometidas a esfuerzos de varios tipos: los que provienen de fuerzas exteriores (determinadas en (1) por $\mathbf{f}$, que debe ser considerado un dato) y los esfuerzos internos. En el caso de un fluido viscoso, los esfuerzos internos se deben por una parte a la presión y, por otra, al rozamiento o fricción de las partículas, es decir, a las fuerzas de *viscosidad*.

FIGURA 3

SIR ISAAC NEWTON (1643–1727; RETRATO DE GODFREY KNELLER, 1702) Y LEONHARD EULER (1707–1783; RETRATO DE EMANUEL HANDMANN, 1753)



La hipótesis “fluido viscoso Newtoniano” significa que los esfuerzos de fricción son proporcionales a las derivadas espaciales de las velocidades. Esta ley de comportamiento fue formulada por Newton en sus célebres *Principia* [1] y constituye un punto de partida para la deducción de las ecuaciones de Navier-Stokes.

La importancia de Newton como figura histórica es de sobra conocida. Sin necesidad de abandonar los Principia, encontramos los fundamentos del desarrollo del cálculo, las leyes de la mecánica clásica, la ley de la gravitación universal y la mencionada ley de la viscosidad.

Se puede presentar una justificación de forma muy sencilla y natural: para que una partícula se vea afectada por la fricción o rozamiento con partículas próximas, es preciso que su velocidad sea distinta; es más, cuanto más distinta sea su velocidad de la de una partícula próxima, más importante será el efecto de dicho rozamiento.

No todos los fluidos viscosos son Newtonianos. De hecho, los llamados fluidos no Newtonianos constituyen un área de trabajo de gran interés. Por ejemplo, algunas sustancias naturales (el magma, la lava), fluidos biológicos (la sangre, la saliva) y fluidos industriales (polímeros, champús) son no Newtonianos. Sin embargo, para muchos fluidos presentes en la Naturaleza (el aire, el agua, el aceite, etc.), la hipótesis Newtoniana es aceptable y suele ser asumida.

2.2. Euler

La gran aportación de Euler en este contexto fue formular el sistema que deben verificar el campo de velocidades y la presión de un fluido cuando los efectos viscosos son despreciables. Usando la segunda ley de Newton, llegó en [2] en 1757 a unas ecuaciones que, con la notación de la sección precedente, toman la forma

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

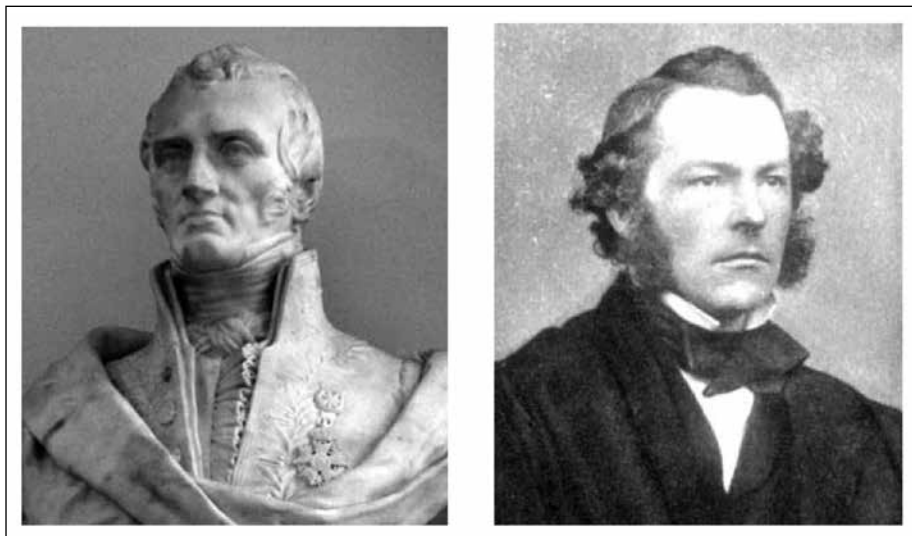
o, abreviadamente,

$$\begin{cases} E_0(\mathbf{u}, p) = \mathbf{f} \\ E_2(\mathbf{u}) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

donde $E_0(\mathbf{u}, p)$ contiene todos los términos de $E_1(\mathbf{u}, p)$ salvo uno (véase el Apéndice).

Se trata de las ecuaciones de *Euler*. Sólo tienen validez cuando las partículas están sometidas a efectos de fricción poco importantes frente a los esfuerzos externos y de presión (de hecho, debemos considerar a Euler el descubridor o “inventor” de la presión como concepto). Pero hay situaciones en las que esto es asumible; por ejemplo, lejos de cuerpos sólidos, el comportamiento del aire queda bien descrito por este sistema.

FIGURA 4
CLAUDE-LOUIS NAVIER (1785-1836) Y GEORGE GABRIEL STOKES (1819-1903)



A pesar de esta limitación, se debe reconocer la enorme importancia que tuvo la contribución de Euler, que fue capaz de incorporar al análisis de problemas de la mecánica de fluidos una nueva herramienta: las ecuaciones en derivadas parciales.

Por otra parte, merece la pena en este punto resaltar la grandeza y relevancia de Euler. Fue un extraordinario matemático que produjo aportaciones decisivas en un gran número de áreas y además consiguió comprender con profundidad las leyes de la Naturaleza.

2.3. Navier y Stokes

Para la formulación de las ecuaciones de Navier-Stokes, los pasos definitivos fueron dados, de manera independiente, por Claude-Louis Navier entre 1833 y 1838 y George G. Stokes en 1845 (véanse [3] y [4]). Incorporando las ideas de Newton y Euler, llegaron al sistema (1).

El primero, famoso ingeniero y físico francés, destacó con independencia de su carrera científica como director de construcción de puentes en Choisy, Asnières, Argenteuil y París. Contribuyó también al desarrollo de la teoría de la elasticidad, siendo hoy día considerado uno de los fundadores del análisis de estructuras.

El segundo, matemático y físico irlandés, se caracterizó especialmente por la precisión y el rigor. Son conocidas sus contribuciones al análisis matemático. Es también sabido que concibió y dedujo muchos resultados que no llegaron a ser publicados, siendo posteriormente atribuidos a otros. De hecho, tras ser nombrado titular de la Cátedra

FIGURA 5
OLGA A. LADYZHENSKAYA (1922-2004) Y JACQUES-LOUIS LIONS (1928-2001)



Lucasiana, se dedicó por decisión propia a ayudar a resolver problemas matemáticos a decenas de miembros de la comunidad universitaria.

Tras la introducción de las ecuaciones de Navier-Stokes, en una primera etapa, pareció que iba a ser posible comprender e incluso controlar el comportamiento de una gran familia de fluidos de interés. Todo se reducía a ser capaces de resolver aquellas. No obstante, un análisis detallado puso pronto de manifiesto las dificultades que entrañaba esta tarea. Tan sólo ha sido posible conseguir soluciones explícitas en un número muy reducido de casos, que corresponden a condiciones iniciales e hipótesis geométricas demasiado particulares.

Si pretendemos comprender bien el comportamiento de un fluido en una región cualquiera de $\mathbf{R}^3$ que parte (por ejemplo) del reposo y está sometido a un campo de esfuerzos exteriores relevante, tenemos que hacer alguna otra cosa.

2.4. Lo de hoy

Esta “otra cosa” se ha concretado en actividades de dos tipos que se han superpuesto y beneficiado mutuamente:

- Por una parte, desde los años 30, se ha puesto una gran cantidad de herramientas del análisis matemático al servicio de las ecuaciones de Navier-Stokes. Sin entrar en demasiados detalles, indiquemos que el objetivo principal ha consistido en demostrar rigurosamente que las ecuaciones (1), adecuadamente complementadas con condiciones iniciales y de contorno, poseen solución única. Desde un punto

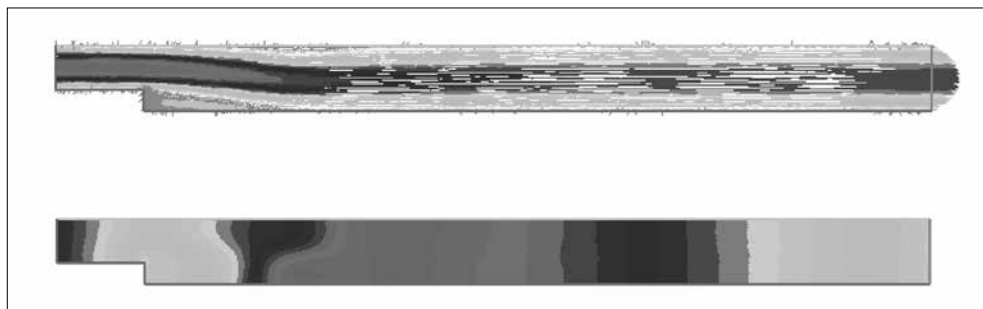
de vista físico, esto permitiría confirmar que el modelo matemático es consistente y completo, es decir, correcto.

La búsqueda de resultados de este tipo ha jugado un papel importante en la introducción de nuevos conceptos y la deducción de nuevos resultados en el marco del análisis funcional y la teoría de ecuaciones en derivadas parciales: distribuciones, espacios de Sobolev y sus propiedades, transformadas integrales, etc. Estas aportaciones comenzaron con Carl W. Oseen [5] y Jean Leray [6] y se han debido a matemáticos de la talla de Heinz Hopf, Jacques-Louis y Pierre-Louis Lions, James Serrin, Olga A. Ladyzhenskaya, Louis Nirenberg y otros; véase [7] para un listado completo de aportaciones. Desafortunadamente, como veremos en la Sección 3, no se ha llegado aún al final del camino: tan sólo sabemos probar la existencia y unicidad de solución cuando se simplifica el problema o se imponen condiciones sobre la talla de los datos.

- Por otro lado, la aparición y el pujante desarrollo de los ordenadores que tuvo lugar a partir de los años 50 del siglo pasado dejaron abiertas nuevas posibilidades. Uno de los padres de la dinámica de fluidos computacional, John Von Neumann, predijo en 1946 que “máquinas de cálculo automático” permitirían en el futuro el acceso a soluciones con tanta precisión que ya no sería necesario el análisis teórico ni por supuesto el cálculo exacto en situaciones simplificadas. Incluso se aventuró a pronosticar que la experimentación física en dinámica de fluidos quedaría en poco tiempo obsoleta.

Realmente, las predicciones de Von Neumann no se han cumplido del todo: sabemos hoy que, en situaciones de interés industrial, la precisión de la resolución numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes no puede ir más allá de ciertos límites no despreciables; además, es posible observar experimentalmente fenómenos que no somos capaces de explicar con los resultados numéricos a nuestro alcance. Sin embargo, tras el trabajo computacional de un gran número de analistas, es indudable que el cálculo de soluciones aproximadas se ha convertido en una herramienta fundamental que tiene presencia e incluso protagonismo en multitud de problemas aplicados; véase [8, 9].

FIGURA 6
SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL CAMPO DE VELOCIDADES Y LA DISTRIBUCIÓN DE LA PRESIÓN DE UN FLUIDO TRAS UN ESCALÓN

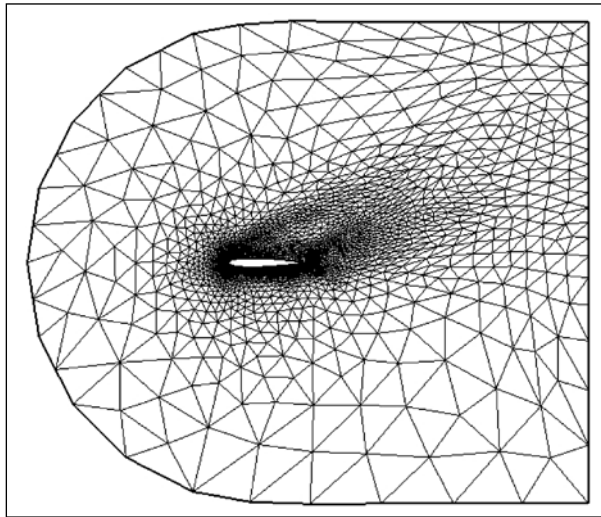


En la actualidad, los métodos teóricos, numéricos y experimentales colaboran con éxito. Por ejemplo, la determinación del flujo de un fluido en torno a un cuerpo aerodinámico hace conveniente una formulación adecuada que lleve a resultados de existencia, unicidad y regularidad, el cálculo aproximado de las soluciones y la ejecución de experiencias coherentes; véase [10]. Por otra parte, para poder ser utilizadas con rigor y seguridad, las propiedades importantes de los métodos numéricos (consistencia, estabilidad, convergencia) necesitan un estudio matemático bien fundamentado.

En las secciones siguientes, recordaré algunas cuestiones abiertas y presentaré varios resultados recientes, teóricos y numéricos, que muestran que las ecuaciones están vivas¹. Al menos en el presente y en el futuro inmediato, seguirán sin duda siendo una fuente de actividad matemática, teórica y numérica.

FIGURA 7

LA REGIÓN ESPACIAL OCUPADA POR LAS PARTÍCULAS DE UN FLUIDO QUE FLUYE EN TORNO A UN CUERPO AERODINÁMICO – MALLADO UTILIZADO PARA LA SIMULACIÓN NUMÉRICA (2146 VÉRTICES Y 4177 TRIÁNGULOS; EL NÚMERO TOTAL DE VARIABLES ES 6438 EN CADA INSTANTE DE TIEMPO)



3. TRES CUESTIONES ABIERTAS

3.1. La unicidad

Me referiré en primer lugar al célebre problema de la unicidad de solución.

Denominemos **[P]** al problema constituido por las ecuaciones (1) complementadas con condiciones iniciales que digan cuánto vale u para $t = 0$ y condiciones de contorno

1. Todos los cálculos mostrados aquí han sido realizados con FreeFem++; véase <http://www.free-fem.org/>.

que digan cuánto vale u sobre el borde de la región ocupada por el fluido. Es posible demostrar la existencia de campos de velocidades u y presiones p que resuelven $[P]$ en el denominado sentido débil.

Esencialmente, esto quiere decir que $\mathbf{u}$ y p verifican las condiciones iniciales y de contorno y, además, los productos de los miembros de la izquierda de las ecuaciones de (1) por funciones arbitrarias, esto es,

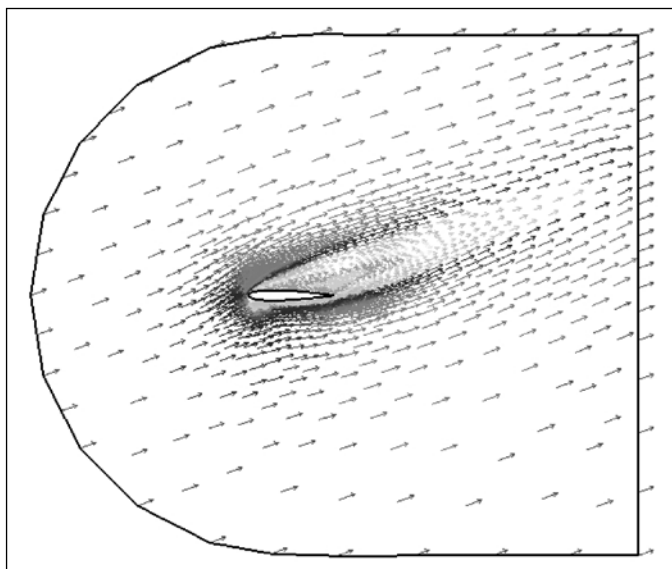
$$E_1(\mathbf{u}, p) \cdot \mathbf{v} \quad \text{y} \quad E_2(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{z},$$

coinciden en promedio con los productos análogos de los términos de la derecha, es decir,

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad \text{y} \quad 0.$$

Ese resultado muestra que $[P]$ es consistente.

FIGURA 8
SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL CAMPO DE VELOCIDADES DE UN FLUIDO ALREDEDOR
DE UN CUERPO AERODINÁMICO. LA VELOCIDAD ES UN VECTOR CONSTANTE LEJOS
DEL OBSTÁCULO (CERCA DEL INFINITO) Y NULA SOBRE EL CUERPO SÓLIDO
(LAS PARTÍCULAS SE ADHIEREN A LA PARED)



Pero podría ser incompleto. Para poder afirmar que, sin duda, $[P]$ es un modelo totalmente aceptable desde la óptica de la mecánica de fluidos, deberíamos ser también capaces de probar que la solución débil es única.

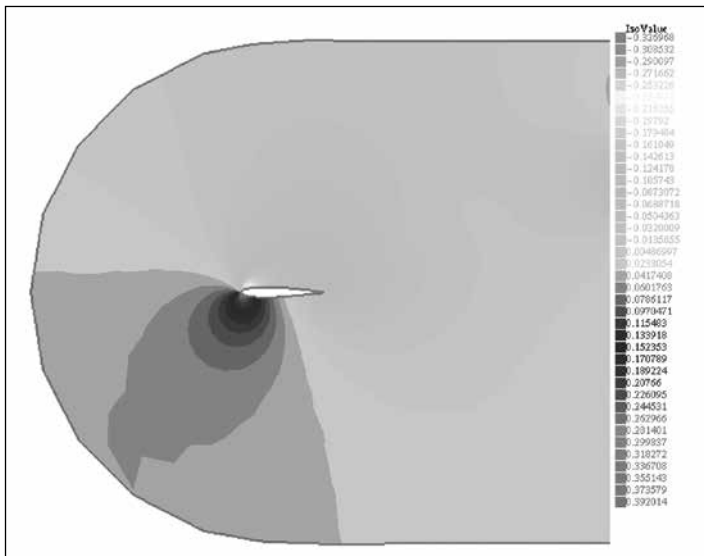
¿Existe a lo más una solución débil de $[P]$ para cada elección de f y de los datos iniciales y de contorno?

Desgraciadamente, conocer la respuesta a esta pregunta parece estar lejos de nuestro alcance. Desde 1933 permanece abierta y tan sólo ha sido posible hasta la fecha probar resultados parciales. Por ejemplo, se puede demostrar que, si (u, p) es una solución débil perteneciente a una familia de funciones suficientemente regulares, entonces (u, p) es la única solución débil en dicha familia (véase el Apéndice para más detalles).

3.2. La regularidad

La regularidad de la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes es también una cuestión abierta. Puede ser formulada del modo siguiente. Supongamos que, en (1), $\mathbf{f} \equiv 0$; supongamos también que la condición de contorno consiste en pedir a u que se anule sobre el borde de la región ocupada por el fluido. Finalmente, supongamos que el dato que aparece en la condición inicial es de clase C^∞ . Esto quiere decir que posee derivadas de todos los órdenes respecto de todas sus variables; nos estamos refiriendo por tanto a un dato cuya regularidad es la mayor posible. Intuitivamente, podemos pensar en un campo inicial cuyas componentes cambian de forma muy suave cuando pasamos de un punto a otro próximo, sin saltos ni cambios bruscos de dirección.

FIGURA 9
SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LA PRESIÓN DE UN FLUIDO ALREDEDOR DE UN CUERPO AERODINÁMICO



¿Es cierto en estas condiciones que la solución débil es también de clase C^∞ ?
Es decir:

¿Es cierto que la regularidad del dato inicial se transmite a la solución o, por el contrario, la evolución del fluido puede ser tal que aparezcan singularidades, o sea, puntos e instantes de tiempo donde la velocidad presente discontinuidades o cambios abruptos?

Cuando la región ocupada por el fluido es todo el espacio, esta cuestión constituye uno de los *problemas del milenio*, formulados por el *Clay Institute* en el año 2000; véase [11]².

Hasta la fecha, la respuesta es desconocida, a pesar de la gran atención recibida; véase por ejemplo [13]. Como antes, sólo conocemos respuestas parciales. Por ejemplo, sabemos que la respuesta es positiva, esto es, la solución es de clase C^∞ , si los datos son pequeños. También sabemos que la respuesta puede ser negativa para ecuaciones muy similares a (1) (véase [14]).

3.3. La controlabilidad

La tercera y última cuestión abierta a la que me referiré tiene que ver con la controlabilidad exacta de (1).

Es mucho más reciente (fue conjeturada por J.-L. Lions hacia 1990) y puede ser formulada del modo siguiente. Una vez más, supongamos fijadas condiciones iniciales y de contorno. Sabemos que, para cada $\mathbf{f}$, existe al menos una solución débil $(\mathbf{u}, p)$ del correspondiente problema $[\mathbf{P}]$. Consideremos ahora sólo aquellos campos de esfuerzos exteriores $\mathbf{f}$ que se anulan fuera de una pequeña región ω .

¿Es posible elegir $\mathbf{f}$ con estas características de modo que $[\mathbf{P}]$ posea una solución débil que, en un tiempo final T , verifique $\mathbf{u}(\mathbf{x}, T) = 0$?

Una respuesta afirmativa nos diría que, actuando exclusivamente sobre las partículas que se encuentran en ω , somos capaces de conducir el fluido desde un estado inicial dado hasta el estado de equilibrio. Seríamos en consecuencia capaces de controlar exactamente a cero el sistema.

Es posible dar una respuesta positiva a la pregunta si se imponen condiciones de contorno de un tipo muy particular; véanse [15]–[18] y las referencias ahí indicadas. Sin embargo, queda todavía pendiente saber qué ocurre en muchas situaciones de interés; por ejemplo, es desconocida la respuesta cuando la región que ocupa el fluido está limi-

2. La formulación de este problema ha sido objeto de polémica: algunos autores piensan que habría sido más natural suponer que la región espacial es acotada y, también, formular el problema como la búsqueda de un concepto de solución para el que sea posible probar la existencia y unicidad; véase por ejemplo [12].

tada por paredes sólidas donde las partículas quedan adheridas (más detalles se ofrecen en el Apéndice).

4. TRES APORTACIONES

A continuación, describiré algunas contribuciones al análisis teórico y numérico y a la controlabilidad de (1) conseguidas en colaboración con un buen número de colegas a lo largo de estos años. Se trata por supuesto de una contribución modesta y perfeccionable, pero creo que constituye una buena muestra de lo que hemos sido capaces de generar y merece la pena ser mostrado aquí.

FIGURA 10
SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL CAMPO DE VELOCIDADES Y LA PRESIÓN DE UN FLUIDO EN EL CUBO UNIDAD. LA RAZÓN “VELOCIDAD CARACTERÍSTICA / VISCOSIDAD CINEMÁTICA” ES 10^3 ; VISUALIZACIÓN SOBRE EL PLANO $x_2 = 0,5$.

4.1. Paralelización y resolución numérica

En primer lugar, hablaré de mi aportación a la resolución numérica de (1). Para ello, consideremos de nuevo el sistema:

Observamos dos dificultades relevantes: por una parte, la presencia del término no lineal $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ y, por otra, la condición de incompresibilidad $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Parece razonable en consecuencia una estrategia de resolución que sea capaz de separar estas dos dificultades.

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases}$$

Además, una manera natural de resolver numéricamente [P] consiste en calcular aproximaciones $(\mathbf{u}^1, p^1), (\mathbf{u}^2, p^2), \dots$, en instantes sucesivos $t_1 = \tau < t_2 = 2\tau < \dots$. Para ello, conviene cambiar en (1) la derivada temporal $\mathbf{u}_t$ por cocientes en diferencias.

Así, teniendo en cuenta estas observaciones, tiene sentido tratar de resolver para $n = 0, 1, \dots$ los sistemas

$$\frac{1}{\tau/2}(\mathbf{u}^{n+1/2} - \mathbf{u}^n) - \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1/2} + (\mathbf{u}^{n+1/2} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1/2} = \mathbf{f}^{n+1/2} - \frac{1}{\rho} \nabla p^n, \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau/2}(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+1/2}) - \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1} + \frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} = \mathbf{f}^{n+1} - (\mathbf{u}^{n+1/2} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1/2} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Arrancando de la condición inicial y complementando (3) y (4) con las condiciones de contorno heredadas de [P], es posible construir una sucesión de aproximaciones.

Algoritmos de este tipo fueron introducidos, entre otros, por R. Glowinski en los 80. Con ellos, fue posible resolver [P] en múltiples condiciones de manera eficiente y precisa; véanse las Fig. 6–9. Algún tiempo después, en [19], fuimos capaces de probar rigurosamente que el algoritmo produce sucesiones que convergen, en un sentido conveniente, hacia una solución débil de [P].

En una etapa posterior, tratando de optimizar recursos, modificamos (3)–(4) e introdujimos esquemas paralelizados como el que sigue:

$$\frac{1}{\tau}(\mathbf{u}^{n,a} - \mathbf{u}^n) - \nu \Delta \mathbf{u}^{n,a} + (\mathbf{u}^{n,a} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n,a} = \mathbf{f}^{n+1} - \frac{1}{\rho} \nabla p^n, \quad (5)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau}(\mathbf{u}^{n,b} - \mathbf{u}^n) - \nu \Delta \mathbf{u}^{n,b} + \frac{1}{\rho} \nabla p^{n,b} = \mathbf{f}^{n+1} - (\mathbf{u}^{n,a} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n,a} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n,b} = 0, \end{cases} \quad (6)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}^{n,a} + \mathbf{u}^{n,b}), \quad p^{n+1} = p^{n,b}. \quad (7)$$

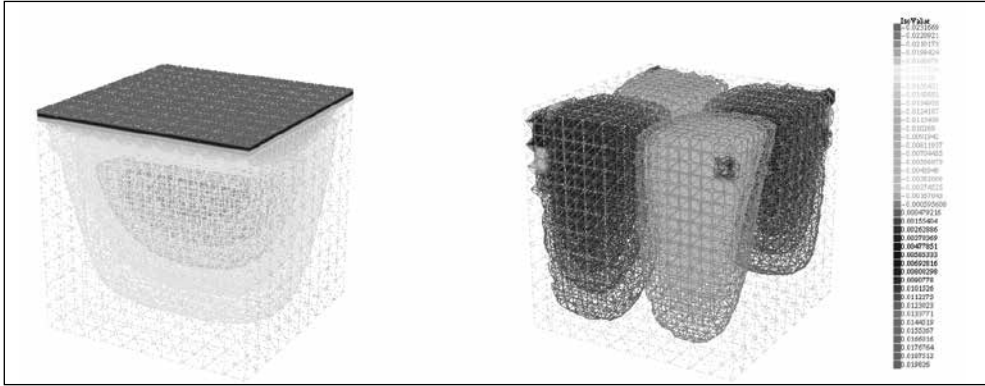
La principal ventaja de (5)–(7) frente a (3)–(4) es que los cálculos más pesados, esto es, la determinación de $\mathbf{u}^{n,a}$ y $(\mathbf{u}^{n,b}, p^{n,b})$, pueden llevarse a cabo “en paralelo”, simultáneamente en procesadores distintos. Naturalmente, esto disminuye el tiempo de cálculo y abarata el proceso numérico.

La resolución de (5) y (6) fue llevada a cabo por métodos numéricos también paralelizados en espacio. Así, en último extremo, todo acaba en el cálculo de las soluciones de un gran número de problemas diferenciales ordinarios que son elementales y pueden ser resueltos de manera simultánea si disponemos de un número suficiente de procesadores.

Los resultados de un buen número de experimentos y el análisis de la convergencia han sido recogidos en [20]–[23]; véanse a este respecto las Fig. 10 y 11.

Conviene destacar que, para la demostración de los resultados de convergencia, la dificultad se reduce siempre a conseguir estimaciones uniformes de las soluciones aproximadas (es decir, acotaciones independientes de τ y los otros parámetros de aproximación) en espacios de funciones adecuados. Cuanto más elaboradas son estas estimaciones, mejores propiedades de convergencia pueden deducirse. En ocasiones, esta

FIGURA 11
SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL CAMPO DE VELOCIDADES Y LA PRESIÓN DE UN FLUIDO EN EL CUBO UNIDAD. LA RAZÓN “VELOCIDAD CARACTERÍSTICA / VISCOSIDAD CINEMÁTICA” ES 10^3 ; VISUALIZACIÓN DE LAS SUPERFICIES $u^1 = \text{CONST.}$ Y $u^2 = \text{CONST.}$

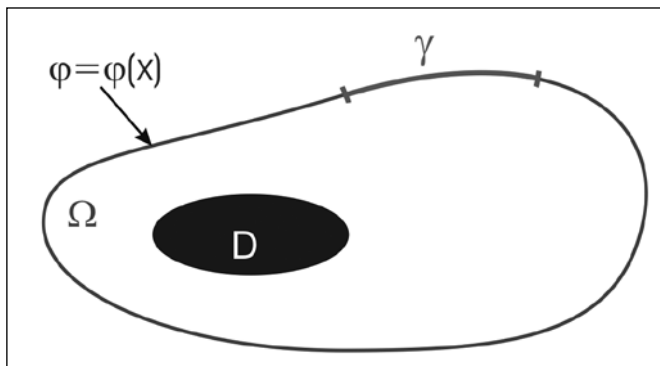


tarea puede ser complicada, especialmente si uno desea exprimir al máximo la idea de paralelización y basar el método en la resolución numérica de problemas simples.

4.2. Identificación de un sólido interior a un fluido

En esta sección me referiré a un problema inverso: la determinación del perfil de un sólido inmerso en un fluido a partir de observaciones frontera.

FIGURA 12
REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN SÓLIDO INMERSO EN UN FLUIDO. EL PROBLEMA INVERSO CONSISTE EN DETERMINAR D A PARTIR DE Ω , LOS VALORES DE u SOBRE EL BORDE DE Ω (QUE DEBEN SER IGUALES A φ) Y LOS ESFUERZOS NORMALES SOBRE γ



Por simplicidad, supondremos que el fluido está en régimen estacionario, esto es, descrito por un campo de velocidades y una presión que son independientes de t y que no actúa ningún campo exterior de fuerzas sobre el mismo. Por tanto, las ecuaciones son en este caso

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Supondremos que la región ocupada por el fluido es de la forma $\Omega \setminus D$, donde Ω es conocido pero D es una incógnita (véase la Fig. 12). También supondremos que el campo de velocidades es conocido sobre los bordes de Ω y D :

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \varphi & \text{sobre el borde de } \Omega \\ 0 & \text{sobre el borde de } D. \end{cases} \quad (9)$$

Finalmente, supondremos que los esfuerzos normales generados por el fluido pueden ser medidos sobre un trozo γ de la frontera de Ω . Esto se escribe así:

$$\sigma_n(\mathbf{u}, p) = \beta \quad \text{sobre } \gamma. \quad (10)$$

Si conociéramos el sólido D , a partir de él y de φ , podríamos determinar (al menos numéricamente) una solución $(\mathbf{u}, p)$ y, después, los correspondientes esfuerzos normales $\sigma_n(\mathbf{u}, p)$. Por el contrario, el problema inverso en cuestión consiste en determinar D a partir de Ω y la información adicional (10).

En relación con este problema inverso, surgen varias cuestiones interesantes:

(i) Unicidad de D : ¿Es cierto que la observación frontera β determina D sin ambigüedad? Es decir, si D^0 y D^1 son dados y generan las observaciones β^0 y β^1 , es cierto que

$$\beta^0 = \beta^1 \Rightarrow D^0 = D^1?$$

(ii) Estabilidad de D : ¿Se puede probar algún tipo de “dependencia continua” de D respecto de β ? Es decir, existen “distancias” adecuadas para las cuales se puede afirmar que

$$\text{dist}(\beta^0, \beta^1) \text{ pequeña} \Rightarrow \text{dist}(D^0, D^1) \text{ pequeña?}$$

(iii) Reconstrucción: Fijados Ω y β , ¿se puede generar una sucesión de sólidos $D^1, D^2, \dots$ que convergen en algún sentido hacia una solución del problema inverso?

Estas cuestiones (y otras parecidas) han sido abordadas en varios trabajos recientes [24, 25]. Entre otros resultados, quiero destacar la prueba de la unicidad presentada en [24], basada en resultados de continuación única para el sistema linealizado de Navier-Stokes que, a su vez, reposan sobre un análisis microlocal adecuado.

4.3. Algunos resultados de controlabilidad

Finalmente, mencionaré algunos resultados parciales de controlabilidad que he podido conseguir en colaboración con mis colegas. Más precisamente, hablaré del control exacto a trayectorias.

Sea $(\mathbf{u}, p)$ una solución de (1) correspondiente a $\mathbf{f} = 0$ y a unos datos iniciales y de contorno concretos. Fijemos de nuevo una pequeña región ω del fluido. Diremos que (1) es exactamente controlable a $(\mathbf{u}, p)$ en el tiempo T si, cualesquiera que sean los datos iniciales y de contorno impuestos, existen campos de esfuerzos exteriores $\mathbf{f}$ que se anulan fuera de ω y soluciones débiles asociadas $(\mathbf{u}, p)$ que verifican

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{para } t = T.$$

Si se da esta propiedad, podemos interpretar que, con independencia de su estado inicial, el fluido puede ser siempre conducido a una situación “deseada” en el instante T actuando en cada instante exclusivamente sobre las partículas que se encuentran en ω . En el caso particular en que $\mathbf{u}$ es idénticamente 0, estaremos hablando de nuevo de la controlabilidad a cero.

En [26]–[28], fuimos capaces de probar resultados locales que afirman que la propiedad precedente tiene lugar (es decir, existen campos $\mathbf{f}$ y soluciones débiles asociadas) a condición de que los datos iniciales y de contorno impuestos sean suficientemente próximos a los que verifica $(\mathbf{u}, p)$.

En un trabajo posterior, hemos complementado el resultado precedente con el análisis y la resolución numérica del problema de controlabilidad; véase [29]. En las Fig. 13–15 y 16–20, se muestran resultados numéricos obtenidos en dos casos simplificados, respectivamente correspondientes al flujo de Poiseuille

$$\bar{\mathbf{u}} = (4x_2(1 - x_2), 0, 0), \quad \bar{p} = -8\nu\rho x_1$$

y al flujo de Taylor-Green

$$\bar{\mathbf{u}} = (\sin(2x_1) \cos(2x_2) e^{-8t}, -\cos(2x_1) \sin(2x_2) e^{-8t}, 0), \quad \bar{p} = 4\nu\rho \cos(2x_1) \cos(2x_2) e^{-8t}.$$

FIGURA 13

TEST DE POISEUILLE – LA REGIÓN ESPACIO-TEMPORAL Y EL MALLADO UTILIZADO (1830 VÉRTICES Y 7830 TETRAEDROS). LA REGIÓN 2D OCUPADA POR EL FLUIDO ES LA BASE DEL PARALEÍPEDO Y EL EJE TEMPORAL ES VERTICAL. EL CONTROL SE EJERCE SOBRE LA REGIÓN MÁS OSCURA. EL TIEMPO FINAL ES $T = 2$. EL NÚMERO TOTAL DE VARIABLES DEL PROBLEMA ES 12810

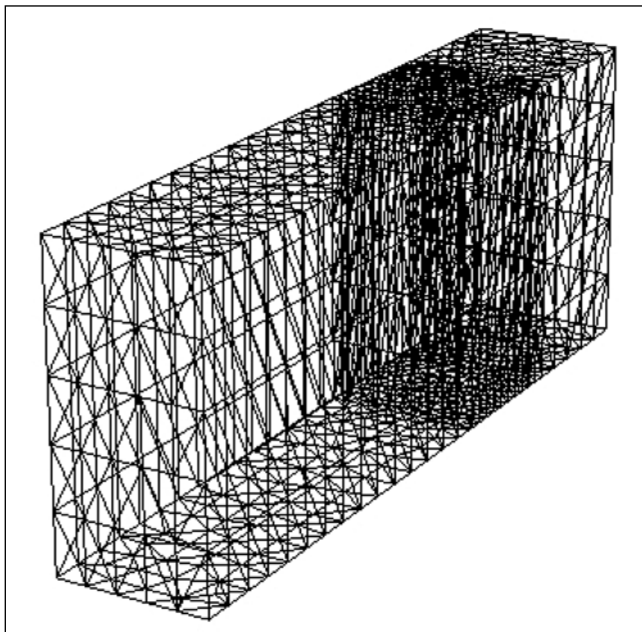


FIGURA 14

TEST DE POISEUILLE – EL ESTADO DESEADO EN $t = T$ (IZQDA.) Y EL ESTADO INICIAL (DRCHA.)

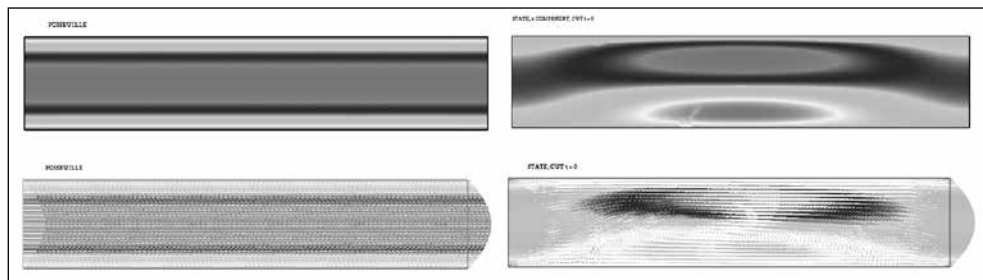


FIGURA 15
TEST DE POISEUILLE – EL ESTADO PARA $t = 1,1$ (IZQDA.) Y EL ESTADO PARA $t = 1,7$ (DRCHA.)

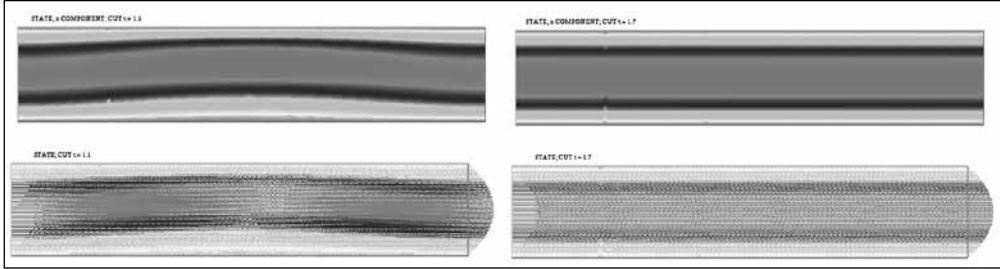
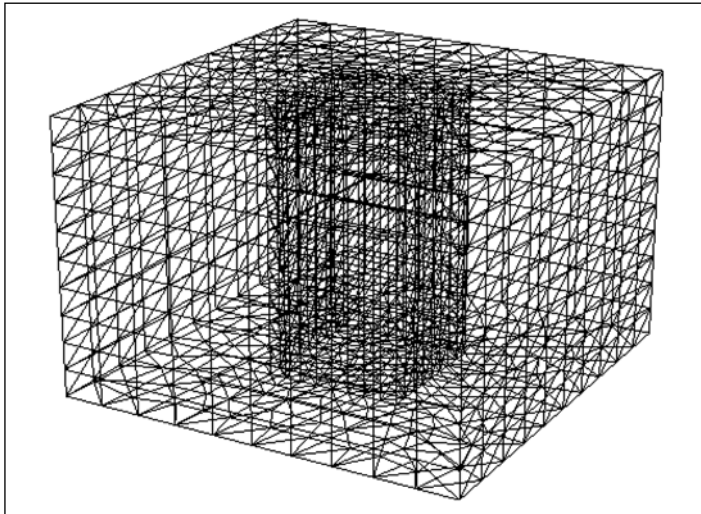


FIGURA 16
TEST DE TAYLOR-GREEN – LA REGIÓN ESPACIO-TEMPORAL Y EL MALLADO UTILIZADO (3146 VÉRTICES Y 15900 TETRAEDROS). DE NUEVO, LA REGIÓN 2D OCUPADA POR EL FLUIDO ES LA BASE Y EL EJE TEMPORAL ES VERTICAL. EL CONTROL SE EJERCE SOBRE LA REGIÓN MÁS OSCURA. EL TIEMPO FINAL ES $T = 1$. EL NÚMERO TOTAL DE VARIABLES ES 22022



5. APÉNDICE

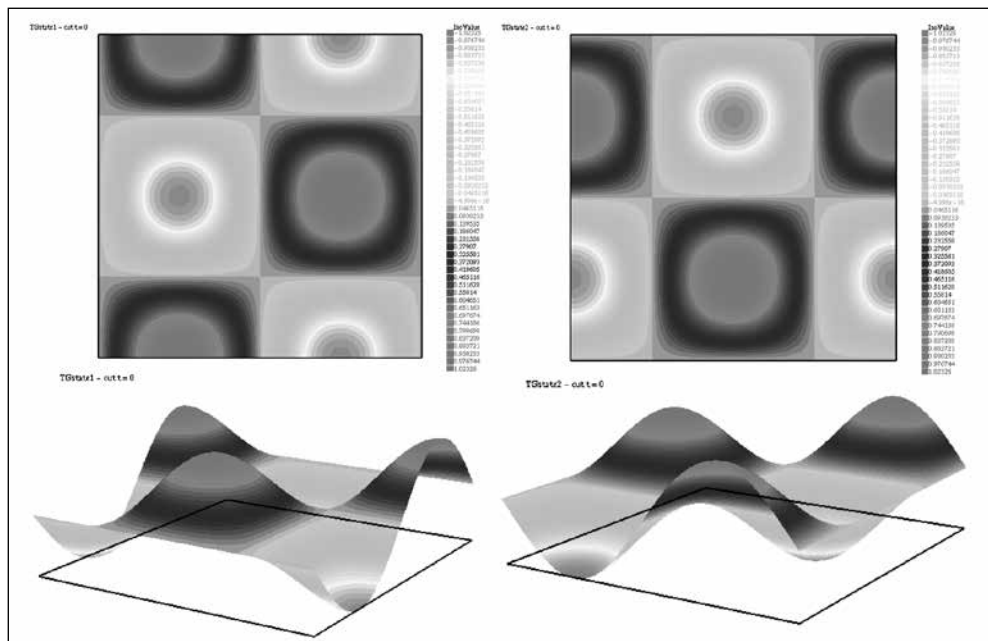
Para comprender bien el significado de las ecuaciones de Navier-Stokes, conviene recordar brevemente, aunque sea con un lenguaje sencillo, dos conceptos: el concepto de función y el concepto de derivada.

- Una función es una regla o ley que permite asociar una cantidad a una o más cantidades, llamadas variables. Por ejemplo, $t \rightarrow x(t)$ es la función que asocia a

cada instante de tiempo t la posición $\mathbf{x}(t)$ de una partícula. Otro ejemplo: $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \theta(x_1, x_2, x_3)$ es la función que asocia a cada punto (x_1, x_2, x_3) del espacio circundante la temperatura $\theta(x_1, x_2, x_3)$.

- La derivada de una función es una nueva función que nos indica en qué modo se producen cambios. Así, la derivada de $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ es la función $t \mapsto \dot{\mathbf{x}}(t)$ que asigna a cada t la velocidad $\dot{\mathbf{x}}(t)$ de la partícula. La derivada parcial $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \partial \theta(x_1, x_2, x_3)$ es la función que asocia a cada punto (x_1, x_2, x_3) una cantidad que indica la variación de la temperatura respecto de la primera coordenada x_1 .

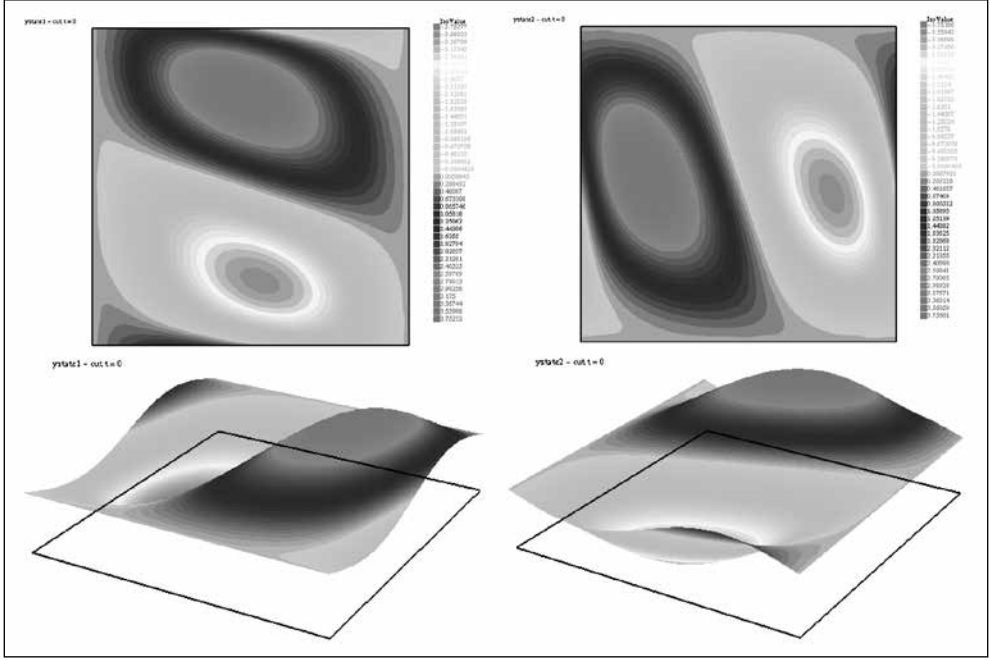
FIGURA 17
TEST DE TAYLOR-GREEN – EL ESTADO DESEADO PARA $t = T$ (PRIMERA COMPONENTE A LA IZQDA. Y SEGUNDA COMPONENTE A LA DCHA.)



Cuando consideramos la derivada de la derivada de una función, decimos que estamos frente a la derivada segunda. Por ejemplo, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \partial^1 \partial^2 \theta(x_1, x_2, x_3)$ y $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \partial^2 \theta(x_1, x_2, x_3)$ son, respectivamente, la derivada segunda cruzada respecto de x_1 y x_2 y la derivada segunda respecto de x_1 dos veces de la función θ .

Generalmente, las leyes de la Física, Química, Biología, Economía, etc. se pueden formular como identidades donde aparecen funciones y sus derivadas. Estas identidades se llaman ecuaciones diferenciales. Cuando las funciones involucradas dependen de varias variables (como en el caso de la temperatura precedente), se dice que estamos ante una ecuación en derivadas parciales.

FIGURA 18
TEST DE TAYLOR-GREEN – EL ESTADO INICIAL (PRIMERA COMPONENTE A LA IZQDA.
Y SEGUNDA COMPONENTE A LA DRCHA.)



En el caso más sencillo posible, para un fluido Newtoniano viscoso, incompresible y homogéneo, las ecuaciones de Navier-Stokes constituyen el sistema de ecuaciones en derivadas parciales que sigue:

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - \nu (\partial_1^2 u_1 + \partial_2^2 u_1 + \partial_3^2 u_1) + u_1 \partial_1 u_1 + u_2 \partial_2 u_1 + u_3 \partial_3 u_1 + \frac{1}{\rho} \partial_1 p = f_1 \\ \partial_t u_2 - \nu (\partial_1^2 u_2 + \partial_2^2 u_2 + \partial_3^2 u_2) + u_1 \partial_1 u_2 + u_2 \partial_2 u_2 + u_3 \partial_3 u_2 + \frac{1}{\rho} \partial_2 p = f_2 \\ \partial_t u_3 - \nu (\partial_1^2 u_3 + \partial_2^2 u_3 + \partial_3^2 u_3) + u_1 \partial_1 u_3 + u_2 \partial_2 u_3 + u_3 \partial_3 u_3 + \frac{1}{\rho} \partial_3 p = f_3 \\ \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3 = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Aquí, las u_i son las componentes del campo de velocidades del fluido y p es la presión a la que están sometidas las partículas (las u_i y p son funciones de las variables (x_1, x_2, x_3, t)). Suponemos que ν y ρ son constantes positivas (la viscosidad cinemática y la densidad de masa del fluido) y las f_i son las componentes de un campo de fuerzas exteriores (también funciones de (x_1, x_2, x_3, t)).

Con una notación simplificada, el sistema toma la forma

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{cases}$$

donde $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$. Más abreviadamente, tenemos (1).

Estas ecuaciones se deben resolver en un conjunto de la forma $\Omega \times (0, T)$, donde $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ es una región del espacio (el dominio ocupado por las partículas del fluido) y $T > 0$ (T es el tiempo final de observación).

Cuando los esfuerzos viscosos son despreciables frente a los otros, el término $-\nu \Delta \mathbf{u}$ puede ser omitido y obtenemos las ecuaciones de Euler:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases}$$

Es usual complementar el sistema de Navier-Stokes con informaciones adicionales. Generalmente, se añade una condición inicial, esto es, se fijan los valores de $\mathbf{u}$ en el instante inicial $t = 0$; también, se suelen imponer condiciones de contorno, es decir, se dice cómo se comporta $\mathbf{u}$ cuando nos acercamos al borde de Ω durante todo el intervalo $(0, T)$. De este modo, queda formulado un problema (llamado de valores iniciales y de contorno) cuya(s) solución(es) nos permite(n) describir y comprender el fenómeno.

Para distintos aspectos (teóricos, numéricos, relacionados con las aplicaciones), pueden consultarse las referencias [30]–[33].

Un ejemplo concreto de problema de valores iniciales y de contorno, el problema del fluido alrededor de un obstáculo, es el siguiente:

Sean Ω y D dos conjuntos de $\mathbf{R}^3$ con una disposición similar a la de la Figura 12; sea g una constante no negativa y pongamos $\mathbf{f} \equiv (0, 0, -g)$; sea $\mathbf{u}_0$ un campo inicial de velocidades y sea $\mathbf{u}_\infty$ un vector constante de norma 1; queremos hallar $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y p verificando (1) para $(u_1, u_2, u_3) \in \Omega \setminus D$ y $0 < t < T$, junto con la condición inicial

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, 0) \equiv \mathbf{u}_0(x_1, x_2, x_3)$$

y las condiciones de contorno

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{u}_\infty & \text{sobre el borde de } \Omega \\ 0 & \text{sobre el borde de } D. \end{cases}$$

En lo que sigue, sólo consideraremos datos iniciales $\mathbf{u}_0$ que verifican las condiciones de contorno y tales que $-\Delta \mathbf{u}_0$ se anula sobre el borde de Ω y sobre el borde de D .

FIGURA 19
TEST DE TAYLOR-GREEN – EL ESTADO PARA $t = 0,6$ (PRIMERA COMPONENTE A LA IZQDA. Y SEGUNDA COMPONENTE A LA DRCHA.)

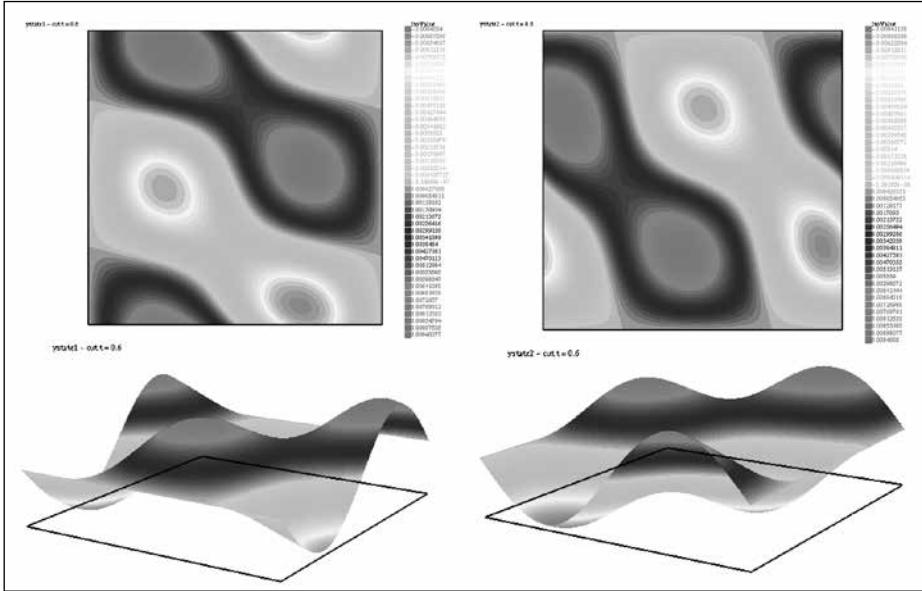
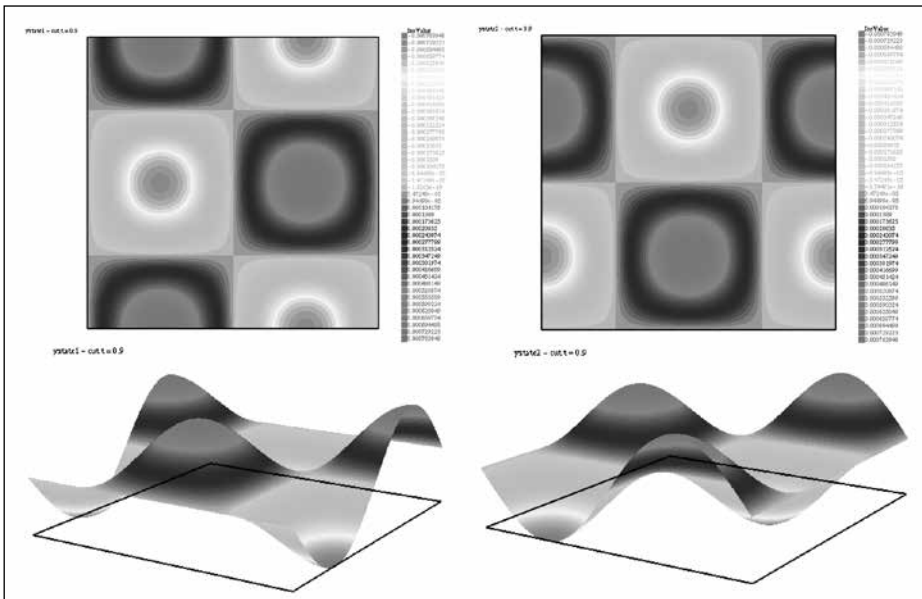


FIGURA 20
TEST DE TAYLOR-GREEN – EL ESTADO PARA $t = 0,9$ (PRIMERA COMPONENTE A LA IZQDA. Y SEGUNDA COMPONENTE A LA DRCHA.)



No es difícil imaginar una formulación análoga en dimensión 2 en espacio. Para ésta, los problemas de unicidad y regularidad enunciados en las Secciones 3.1 y 3.2 poseen respuestas afirmativas: para cada elección de g , $\mathbf{u}_0$ y $\mathbf{u}_\infty$, la solución débil es única y, además, si $\mathbf{u}_0$ es de clase C^∞ , también lo son u y p .

En el caso tridimensional, como hemos indicado, estos problemas están abiertos. Se conocen sin embargo algunos resultados parciales.

Así, si se supone que la solución débil verifica

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega \setminus D} |\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|^r d\mathbf{x} \right)^{s/r} dt < +\infty, \quad \text{con} \quad \frac{2}{s} + \frac{3}{r} \leq 1, \quad r > 3,$$

entonces es única en la familia de soluciones que cumple esta propiedad; véase [34]. La misma conclusión se consigue si la función

$$t \mapsto \int_{\Omega \setminus D} |\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|^3 d\mathbf{x},$$

definida para $0 \leq t \leq T$, es continua; véase [35].

Luego una manera posible de abordar la cuestión de la unicidad consiste en averiguar previamente si la regularidad es cierta. Sin embargo, en el contexto de la regularidad, de nuevo sólo tenemos a nuestra disposición resultados parciales:

- Si el dato inicial $\mathbf{u}_0$ es de clase C^∞ y T es suficientemente pequeño, $\mathbf{u}$ y p también son de clase C^∞ ; véase por ejemplo [36]–[39].
- En la afirmación anterior, la hipótesis “ T es suficientemente pequeño” puede ser sustituida por esta otra: “ v es suficientemente grande”.
- Por otra parte, siempre que $\mathbf{u}_0$ esté en las condiciones precedentes, el conjunto de los puntos singulares, esto es, los puntos $(\mathbf{x}, t)$ donde $\mathbf{u}$ deja de ser regular es, en un sentido adecuado, pequeño. En esta dirección, el mejor resultado conocido se encuentra en [40]; véase también [12].

La controlabilidad es una cuestión que también permanece abierta. Un resultado parcial, que enunciaré en términos algo ambiguos, es el siguiente: sea $\mathbf{u}_0$ un dato inicial y sea (u, p) una solución débil asociada; supongamos que

$$\sup_{(\mathbf{x}, t)} |\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)| < +\infty;$$

entonces, para cada dato inicial $\mathbf{u}_0$ suficientemente próximo a $\mathbf{u}_0$, existe un dato de contorno $\mathbf{v}_\infty = \mathbf{v}_\infty(x, t)$ y una solución asociada $(\mathbf{u}, p)$ que verifica

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, T) \equiv \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, T).$$

Este resultado es consecuencia de los que aparecen en [26]; su demostración utiliza técnicas de dos tipos:

- En primer lugar, analizamos la situación para un problema linealizado en torno a $(\mathbf{u}, p)$. Más precisamente, introducimos el par $(\mathbf{y}, q)$ con $(\mathbf{u}, p) = (\mathbf{y}, q) + (\mathbf{u}, p)$, escribimos las ecuaciones que debe satisfacer $(\mathbf{y}, q)$ y despreciamos los términos cuadráticos. El sistema resultante es el siguiente:

$$\begin{cases} \mathbf{y}_t - \nu \Delta \mathbf{y} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{y} + (\mathbf{y} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} + \frac{1}{\rho} \nabla q = \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{y} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Para este sistema (que es lineal), es posible demostrar un resultado de control exacto a cero. La prueba es muy técnica y reposa sobre desigualdades globales de tipo Carleman para las soluciones. Dicho en pocas palabras, la clave está en ser capaces de conseguir una estimación de las soluciones del tipo

$$I(\mathbf{y}) \leq C I_{\text{loc}}(\mathbf{y}), \quad (13)$$

donde a la izquierda ponemos una suma de integrales globales de potencias de $\mathbf{y}$ y sus derivadas y en el lado derecho aparecen integrales locales; aquí, “integral global” significa extendida a toda la región ocupada por el fluido y a todo el intervalo temporal, mientras que “integral local” quiere decir en ω y de 0 a T .

- En segundo lugar, se usa un resultado de inversión local (un teorema de función inversa) para sacar conclusiones en el marco de (1) a partir de la controlabilidad a cero de (12). Desgraciadamente, para poder aplicar este resultado, es necesario imponer una hipótesis que, convenientemente interpretada, significa que, efectivamente, los datos impuestos deben ser próximos a los que verifica $(\mathbf{u}, p)$. Con las herramientas actuales, no somos capaces de probar estimaciones que permitan aplicar un teorema de inversión global.

Así, vemos que es posible controlar exactamente toda trayectoria de este problema que esté acotada si, en el instante inicial, no estamos lejos de ella. Por supuesto, sería interesante saber si esta posibilidad continuará siendo cierta si arrancamos de un campo de velocidades lejano.

REFERENCIAS

- [1] NEWTON, I., *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, University of Cambridge, 1687.
- [2] EULER, L., *Principes généraux du mouvement des fluides*, Mémoires de l’Académie des Sciences de Berlin, 1757.

- [3] NAVIER, C.-L., *Résumé des leçons données à l'École des Ponts et Chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines*, Vol. 2: *Leçons sur le mouvement et la résistance des fluides*, la conduite et la distribution des eaux, 2 éd. Carilian- Goeury, Paris, 1833–1838.
- [4] STOKES, G., *On the theories of the internal friction of fluids in motion*, 1845; reprint by Cambridge University Press, 2009.
- [5] OSEEN, C.W., *Newer Methods and Results in Hydrodynamics (German)*, Akademie Verlag, 1927.
- [6] LERAY, J., *Essai sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace*, Acta Mathematica, 63, 1933, pp. 193–248.
- [7] LEMARIE-RIEUSSET, J. *The Navier-Stokes problem in the 21st Century*, CRC Press, Boca Raton, 2016.
- [8] SALVI, R. (ed.), *The Navier-Stokes equations: theory and numerical methods, Proceedings of the International Conference held in Varenna, 2000*. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 223. Marcel Dekker, Inc., New York, 2002.
- [9] GLOWINSKI, R., *Finite element methods for incompressible viscous flow, Handbook of numerical analysis*, Vol. IX, 3–1176, Handb. Numer. Anal., IX, North-Holland, Amsterdam, 2003.
- [10] NECASOVA, S.; KRAMAR, S., *Navier-Stokes flow around a rotating obstacle*, Mathematical analysis of its asymptotic behavior. Atlantis Briefs in Differential Equations, 3. Atlantis Press, Paris, 2016.
- [11] <http://www.claymath.org/millennium-problems/navier-stokes-equation>.
- [12] LADYZHENSKAYA, O.A., *The sixth millennium problem: Navier-Stokes equations, existence and smoothness (Russian)*, translated from Uspekhi Mat. Nauk 58 (2003), no. 2 (350), 45–78, Russian Math. Surveys 58 (2003), no. 2, 251–286.
- [13] SEREGIN, G., *Lecture notes on regularity theory for the Navier-Stokes equations*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2015.
- [14] TAO, T., *Finite time blowup for an averaged three-dimensional Navier-Stokes equation*, J. Amer. Math. Soc. 29 (2016), no. 3, 601–674.
- [15] FURSIKOV, A.V.; IMANUVILOV, O. YU., *Exact controllability of the Navier-Stokes and Boussinesq equations (Russian)*, translated from Uspekhi Mat. Nauk 54 (1999), no. 3 (327), 93–146, Russian Math. Surveys 54 (1999), no. 3, 565–618.
- [16] CORON, J.-M.; FURSIKOV, A.V., *Global exact controllability of the 2D Navier-Stokes equations on a manifold without boundary*, Russian J. Math. Phys. 4 (1996), no. 4, 429–448.
- [17] CORON, J.-M., *On the controllability of the 2-D incompressible Navier-Stokes equations with the Navier slip boundary conditions*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 1 (1995/96), 35–75.
- [18] CORON, J.-M.; MARBACH, F.; SUEUR, F., *Small time global exact null controllability of the incompressible Navier-Stokes equation with Navier slip-with-friction boundary condition*, a aparecerá.
- [19] FERNÁNDEZ-CARA, E.; MARÍN-BELTRÁN, M., *The convergence of two numerical schemes for the Navier-Stokes equations*, Numer. Math. 55 (1989), no. 1, 33–60.
- [20] CRUZ, J.L.; CALZADA, M.C.; MARÍN-BELTRÁN, M.; FERNÁNDEZ-CARA, E., *A parallel algorithm for solving the incompressible Navier-Stokes problem*, Comput. Math. Appl. 25 (1993), no. 9, 51–58.
- [21] CRUZ, J.L.; CALZADA, M.C.; MARÍN-BELTRÁN, M.; FERNÁNDEZ-CARA, E., *A convergence result for a parallel algorithm for solving the incompressible Navier-Stokes problem*, Comput. Math. Appl. 35 (1998), no. 4, 71–88.
- [22] ALBARREAL, I.; CALZADA, M.C.; CRUZ, J.L.; FERNÁNDEZ-CARA, E.; GALO, J.; MARÍN-BELTRÁN, M., *Convergence analysis and error estimates for a parallel algorithm for solving the Navier-Stokes equations*, Numer. Math. 93 (2002), no. 2, 201–221.
- [23] ALBARREAL, I.; CALZADA, M.C.; CRUZ, J.L.; FERNÁNDEZ-CARA, E.; GALO, J.; MARÍN-BELTRÁN, M., *Time and space parallelization of the Navier-Stokes equations*, Comput. Appl. Math. 24 (2005), no. 3, 417–438.

- [24] DOUBOVA, A.; FERNÁNDEZ-CARA, E.; GONZÁLEZ-BURGOS, M.; ORTEGA, J.H., *A geometric inverse problem for the Boussinesq system*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 6 (2006), no. 6, 1213–1238.
- [25] DOUBOVA, A.; FERNÁNDEZ-CARA, E.; ORTEGA, J.H., *On the identification of a single body immersed in a Navier-Stokes fluid*, European J. Appl. Math. 18 (2007), no. 1, 57–80.
- [26] FERNÁNDEZ-CARA, E.; GUERRERO, S.; IMANUVILOV, O. YU.; PUEL, J.-P., *Local exact controllability of the Navier-Stokes system*, J. Math. Pures Appl. (9) 83 (2004), no. 12, 1501–1542.
- [27] FERNÁNDEZ-CARA, E.; GUERRERO, S.; IMANUVILOV, O. YU.; PUEL, J.-P., *Some controllability results for the N -dimensional Navier-Stokes and Boussinesq systems with $N - 1$ scalar controls*, SIAM J. Control Optim. 45 (2006), no. 1, 146–173.
- [28] FERNÁNDEZ-CARA, E.; LÍMACO, J.; DE MENEZES, S.B., *Theoretical and numerical local null controllability of a Ladyzhenskaya-Smagorinsky model of turbulence*, J. Math. Fluid Mech. 17 (2015), no. 4, 669–698.
- [29] FERNÁNDEZ-CARA, E.; MUÑOCH, A.; SOUZA, D.A., *On the numerical controllability of the two-dimensional heat, Stokes and Navier-Stokes equations*, J. Sci. Comput. 70 (2017), no. 2, 819–858.
- [30] FOIAS, C.; MANLEY, O.; ROSA, R.; TEMAM, R., *Navier-Stokes equations and turbulence*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 83. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [31] TARTAR, L., *An introduction to Navier-Stokes equation and oceanography*, Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, 1. Springer-Verlag, Berlin; UMI, Bologna, 2006.
- [32] CHEMIN, J.-Y.; DESJARDINS, B.; GALLAGHER, I.; GRENIER, E., *Mathematical geophysics. An introduction to rotating fluids and the Navier-Stokes equations*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 32. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2006.
- [33] ROBINSON, J.C.; RODRIGO, J.L.; SADOWSKI, W.; VIDAL-LÓPEZ, A. (eds.), *Recent progress in the theory of the Euler and Navier-Stokes equations*, Including papers from the workshop “The Navier-Stokes Equations in Venice”, held in Venice, April 8–12, 2013, London Mathematical Society Lecture Note Series, 430. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.
- [34] LIONS, J.-L., *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [35] LIONS, P.-L.; MASMOUDI, N., *Uniqueness of mild solutions of the Navier-Stokes system in L^N* , Comm. Partial Differential Equations 26 (2001), no. 11–12, 2211–2226.
- [36] CONSTANTIN, P.; FOIAS, C., *Navier-Stokes equations*, Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1988.
- [37] HEYWOOD, J.G., *The Navier-Stokes equations: on the existence, regularity and decay of solutions*, Indiana Univ. Math. J. 29 (1980), no. 5, 639–681.
- [38] HEYWOOD, J.G., *Open problems in the theory of the Navier-Stokes equations for viscous incompressible flow*, The Navier-Stokes equations (Oberwolfach, 1988), 1–22, Lecture Notes in Math., 1431, Springer, Berlin, 1990.
- [39] HEYWOOD, J.G., *Remarks on the possible global regularity of solutions of the three-dimensional Navier-Stokes equations*, Progress in theoretical and computational fluid mechanics (Paseky, 1993), 1–32, Pitman Res. Notes Math. Ser., 308, Longman Sci. Tech., Harlow, 1994.
- [40] CAFFARELLI, L.; KOHN, R.; NIRENBERG, L., *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Comm. Pure Appl. Math. 35 (1982), no. 6, 771–831.

Excelentísimo Sr. Presidente de la Real Academia Sevillana de Ciencias, Ilustrísimo Sr. Decano de la Facultad de Matemáticas, Excmos. Sres. Académicos, queridos compañeros y amigos, Señoras y Señores:

El acto que estamos celebrando, recepción en nuestra querida Academia de un nuevo Académico es motivo de alegría para todos los que la integramos. Y tengo el alto honor de que el Excmo. Presidente me haya designado para responder al excelente discurso que ha pronunciado el nuevo Académico, pero a este honor se une la gran satisfacción que me produce el hacerlo, ya que me unen con Don Enrique Fernández Cara varios vínculos afectivos, como el de ser los dos de Jerez de la Frontera, el haber sido mi alumno en los primeros años de mi incorporación a la Universidad de Sevilla, y el de haber surgido entre nosotros una gran amistad. Enrique pertenece a una de las promociones más excelentes en las que he tenido la satisfacción de realizar mi labor docente. Esta promoción es la de 1974-1979 y prueba del alto nivel de esta promoción, es que la mayoría de los integrantes de la misma están ejerciendo su labor académica en distintas Universidades, pues bien de todos ellos sobresalía la inteligencia de Enrique Fernández Cara.

Concluye los estudios de la Licenciatura de Matemáticas en junio de 1979, obteniendo el Premio Extraordinario de Licenciatura, el Premio Real Maestranza de Caballería y el Premio Nacional de Terminación de Estudios concedido por el Ministerio de Educación.

Terminada la Licenciatura se incorpora al Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, dirigido por Don Antonio Valle y bajo su dirección académica realiza su Tesis Doctoral, Tesis que defiende en la Universidad de Sevilla en Julio de 1981. En noviembre de este mismo año defiende en la Universidad París 6 una nueva Tesis Doctoral. El núcleo central de ambas Tesis Doctorales es el análisis desde un punto de vista teórico y numérico del comportamiento de los vórtices o torbellinos generados en fluidos estacionarios. Estudia y obtiene resultados teóricos y numéricos en la optimización de perfiles aerodinámicos en fluidos reales y resuelve numéricamente problemas con origen en el proceso de fabricación de dispositivos semi-conductores.

Completó su formación investigadora en Francia, ya que fue becario en el INRIA-Rocquencourt y Profesor Ayudante de Clases Prácticas en la Universidad París 13, siendo sus principales áreas de interés, desde el punto de investigación: *“El análisis teórico y numérico de las ecuaciones en derivadas parciales, con énfasis especial en las ecuaciones no lineales con origen, entre otras Ciencias, en Física y Biología”* y *“Los problemas de Control y optimización relacionados”*.

En julio de 1986 obtiene mediante Concurso-Oposición la plaza de Catedrático adscrita al Departamento de Ecuaciones Funcionales y Análisis Numérico, de cual fue Director en los periodos 1993-2000 y 2005-2009. Con anterioridad fue Vicedecano de la Facultad de Matemáticas durante los años 1988 y 1989, año en el que dirige el Departamento de Análisis Matemático 1989-1992, así pues cuenta, además de su labor investigadora, con una amplia experiencia en gestión académica.

DISCURSO PRONUNCIADO POR EL EXCMO. SR. D. RAFAEL INFANTE MACÍAS

*Académico Numerario,
en contestación al leído por el
Ilmo. Sr. D. Enrique Fernández Cara,
en el Acto de su recepción como Académico Numerario
el día 25 de Abril de 2017.*

Excelentísimo Sr. Presidente de la Real Academia Sevillana de Ciencias, Ilustrísimo Sr. Decano de la Facultad de Matemáticas, Excmos. Sres. Académicos, queridos compañeros y amigos, Señoras y Señores:

El acto que estamos celebrando, recepción en nuestra querida Academia de un nuevo Académico, es motivo de alegría para todos los que la integramos. Y tengo el alto honor de que el Excmo. Presidente me haya designado para responder al excelente discurso que ha pronunciado el nuevo Académico, pero a este honor se une la gran satisfacción que me produce el hacerlo, ya que me unen con Don Enrique Fernández Cara varios vínculos afectivos, como el de ser los dos de Jerez de la Frontera, el haber sido mi alumno en los primeros años de mi incorporación a la Universidad de Sevilla, y el de haber surgido entre nosotros una gran amistad. Enrique pertenece a una de las promociones más excelentes en las que he tenido la satisfacción de realizar mi labor docente. Esta promoción es la de 1974-1979 y prueba del alto nivel de esta promoción, es que la mayoría de los integrantes de la misma están ejerciendo su labor académica en distintas Universidades, pues bien de todos ellos sobresalía la inteligencia de Enrique Fernández Cara.

Concluye los estudios de la Licenciatura de Matemáticas en junio de 1979, obteniendo el Premio Extraordinario de Licenciatura, el Premio Real Maestría de Caballería y el Premio Nacional de Terminación de Estudios concedido por el Ministerio de Educación.

Terminada la Licenciatura se incorpora al Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, dirigido por Don Antonio Valle y bajo su dirección académica realiza su Tesis Doctoral, Tesis que defiende en la Universidad de Sevilla en Julio de 1981. En noviembre de este mismo año defiende en la Universidad París 6 una nueva Tesis Doctoral. El núcleo central de ambas Tesis Doctorales es el análisis desde un punto de vista teórico y numérico del comportamiento de los vórtices o torbellinos generados en fluidos estacionarios. Estudia y obtiene resultados teóricos y numéricos en la optimización de perfiles aerodinámicos en fluidos reales y resuelve numéricamente problemas con origen en el proceso de fabricación de dispositivos semi-conductores.

Completó su formación investigadora en Francia, ya que fue becario en el INRIA-Rocquencourt y Profesor Ayudante de Clases Prácticas en la Universidad París 13, siendo sus principales áreas de interés, desde el punto de investigación: *“El análisis teórico y numérico de las ecuaciones en derivadas parciales, con énfasis especial en las ecuaciones no lineales con origen, entre otras Ciencias, en Física y Biología”* y *“Los problemas de Control y optimización relacionados”*.

En julio de 1986 obtiene mediante Concurso-Oposición la plaza de Catedrático adscrita al Departamento de Ecuaciones Funcionales y Análisis Numérico, de cual fue Director en los periodos 1993-2000 y 2005-2009. Con anterioridad fue Vicedecano de la Facultad de Matemáticas durante los años 1988 y 1989, año en el que dirige el Departamento de Análisis Matemático 1989-1992, así pues cuenta, además de su labor investigadora, con una amplia experiencia en gestión académica.

En una segunda etapa, sus trabajos de investigación profundizaron en el análisis numérico de problemas de tipo Navier-Stokes, consiguiendo importantes resultados de convergencia de esquemas de gran eficiencia. A continuación inicia su actividad investigadora en varios frentes, consiguiendo, en colaboración con sus discípulos y otros investigadores una larga familia de resultados satisfactorios que han ido sucediéndose hasta en el día de hoy. Resaltemos algunos de ellos:

Introducción, análisis y aplicación de diversos métodos de paralelización para la resolución numérica de problemas no lineales.

Inició un estudio detallado de diversos problemas con origen en Mecánica, relacionados con fluidos quasi-Newtonianos y no Newtonianos. Mejoró resultados teóricos sobre la existencia y comportamiento de fluidos visco-elásticos de tipo Oldroyd.

En el contexto de la Teoría de Control, profundiza en el cálculo de la derivada respecto de dominios y aplicaciones a problemas de diseño óptimo.

También en este marco colaboró en la resolución de importantes problemas de controlabilidad exacta y aproximada de sistemas no lineales.

Resolvió cuestiones importantes para problemas inversos de tipo geométrico.

Todos estos resultados han estado motivados por aplicaciones de máximo interés. Destacaremos las siguientes:

La descripción y control del comportamiento de fluidos en procesos industriales.

La optimización de campos de heliostatos en sistemas termosolares con tecnología de torre.

La detección de tumores, descripción de su evolución y optimización de estrategias de terapia.

Un problema muy interesante al que el Profesor Fernández Cara ha dedicado muchos esfuerzos y a cuya resolución ha contribuido de manera importante, es el control de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales no escalares con un número mínimo de controles. A título de ejemplo citemos que en una habitación tiene sentido tratar de gobernar, desde un rincón de la misma, el comportamiento de la temperatura, el nivel de humedad y el flujo de aire actuando exclusivamente sobre una de estas tres variables. ¿Es posible? ¿Sería costoso? El profesor Fernández Cara dio respuestas parciales a estas preguntas. Respuestas que fueron recogidas en diversos artículos publicados en revistas de alto nivel científico como el del Journal of Functional Analysis.