



RASC

Real Academia  
Sevillana de Ciencias

## Los axiomas de la Matemática

discurso pronunciado por el

Ilmo. Sr. D.

Juan Arias de Reyna Martínez

en el acto de recepción como académico numerario

el día 1 de diciembre de 1988

y

contestación del académico numerario

Ilmo. Sr. D.

Antonio de Castro Brzezicki

---

## LOS AXIOMAS DE LA MATEMÁTICA

*Discurso pronunciado por el  
ILMO. SR. D. JUAN ARIAS DE REYNA MARTINEZ  
en el acto de su recepción como Académico  
Numerario celebrado el 1 de Diciembre de 1988.*

*“Le philosophe conserverait le droit de rechercher les  
origines de ces conventions, de voir pourquoi elles ont été  
jugées préférables aux conventions contraires”. Poincaré.*

Señoras y Señores:

Tengo que empezar agradeciendo a la Academia Sevillana de Ciencias el honor que me ha hecho al elegirme como miembro.

Al escoger el tema del discurso de recepción dudé mucho entre escoger un tema propio de mis investigaciones matemáticas o un tema de más fácil comprensión. En realidad, me encuentro, en cierta manera, como un compositor al que le prohíben interpretar su composición y sólo se le permite enseñar la partitura. La Matemática se parece a la música escrita; es difícil comprenderla sin una preparación previa.

Por estas razones, he preferido optar por un tema que es de interés general, y puede ser expresado en un lenguaje asequible a todos. Sin embargo, sería un error decir que es fácil de entender. Adelanto que se necesita una atención constante para no perder el hilo del razonamiento. Aparte de esto, creo que el desarrollo del tema puede sorprender, incluso a mis oyentes matemáticos, si no tienen un especial interés en el tema de los fundamentos, pues en este siglo se han producido adelantos considerables, que han alterado nuestro concepto de la Matemática como Ciencia. Empezamos comentando los axiomas clásicos de la Geometría y la Aritmética.

### 1. LOS AXIOMAS DE LA GEOMETRIA.

Al igual que la filosofía del mundo occidental, la Matemática nace en Grecia. Al menos allí surge por primera vez la idea de la demostración. Esto conduce, de

manera natural, a establecer unos principios no demostrados, lo que en el libro de Euclides se refleja perfectamente, aún cuando Platón lo ve como una imperfección de la Matemática, que no debe tener la verdadera Ciencia<sup>1</sup>.

Observaremos que en los Elementos de Euclides aparecen sin demostración: Las definiciones (*horoi*), las nociones comunes (*koinai ennoiai*) y los postulados (*aitemata*).

En principio, sus definiciones no implican la existencia de lo definido, y por tanto, en líneas generales, coinciden con lo que hoy día llamamos definiciones. Sin embargo, entre las definiciones del libro V de Euclides, se encuentra la de *igual razón*, en la que puede decirse que está contenida la teoría moderna del número real.

Las nociones comunes corresponden a nuestros axiomas. Ejemplos típicos de nociones comunes son:

“Cosas iguales a una tercera son iguales entre sí”.

“El todo es mayor que la parte”.

Por último, los postulados son proposiciones de las que se pide al lector que las acepte. La diferencia entre los postulados y las nociones comunes en Euclides no está clara aún hoy día. Unos dicen que un postulado es lo que afirma la posibilidad de una construcción. Otros que un postulado es una proposición con sentido geométrico, en contraposición a las nociones comunes con sentido a la vez geométrico y aritmético. Finalmente, otros afirman que una noción común es lo que es verdadero en sí mismo, y un postulado lo que se admite sin demostración, aún no siendo una noción común.<sup>2</sup>

Entre los postulados se encuentra el famoso quinto postulado:

“Si una línea recta corta a otras dos formando ángulos interiores, del mismo lado, menores que dos rectos, las dos líneas prolongadas indefinidamente se cortarían del lado en que los ángulos son menores que dos rectos”.

Suele sustituirse este enunciado por otro equivalente. Puede leerse el libro de Carroll - el autor de Alicia - “Euclides y sus modernos rivales” para convencerse de que la elección de Euclides es la mejor.

Es claro que los muchos intentos que se hicieron de demostrar el quinto postulado corroboran la idea de que no era intuitivamente evidente.

Así pues, tal como se nos presenta en su nacimiento, la Geometría griega está, en gran parte, sacada de la realidad, Pero difícilmente se le puede llamar por eso ciencia experimental. No se trata nunca de justificar el postulado por medio de la experiencia. Mas bien se justifican los axiomas por una imagen mental o ideal, como hace Platón con su mundo de las ideas, o también - saltando en el tiempo - Kant, con su concepto del espacio y el tiempo como formas apriori de la sensibilidad.

---

1 Platón, República 533<sup>c</sup> 8, p. 223 en la edición de Espasa-Calpe

2. R. Bonola, p. 18

Así vemos que Carroll<sup>3</sup> pone en labios de Euclides las palabras:

“Pero, si mira en las profundidades de su consciencia - suponiendo que tales profundidades existan - encontrará, creo, una distinción eterna, a este respecto [se refiere al quinto postulado], entre las líneas rectas y las curvas: de modo que las primeras, si se acercan, *deben* cortarse, mientras que las otras no”.

Lo que deducimos de esta frase es que hay que volverse hacia dentro de uno mismo para comprender la verdad del postulado. Pero debemos notar un detalle: el edificio lógico de Euclides no es perfecto, de sus axiomas no se deducen sus teoremas. Hay muchas afirmaciones que están basadas en la experiencia espacial del lector y no en los axiomas admitidos. Esto prueba que el castillo no se apoya en cimientos tan puros como los que soñaba Platón.

Que existían lagunas en las demostraciones de Euclides se sabía al menos desde los tiempos de J. Wallis (1616-1703). También lo conocía B. Lamy (1640-1715), y es lugar común en los textos alemanes del siglo XVIII.<sup>4</sup> Pero, sorprendentemente, no se hizo un intento de sacar a la luz cada hipótesis de Euclides hasta el final del siglo XIX.

En su libro, Moritz Pasch (1882) es el primero que da una construcción axiomática rigurosa de la Geometría proyectiva. Otras construcciones fueron dadas por Peano (1889), Veronese (1891), Enriques (1898), Pieri (1899) y Hilbert (1899). Hilbert hace, además, un estudio de la axiomática desde el punto de vista de la independencia, es decir, hasta qué punto son necesarios los axiomas, y desde el punto de vista de la categoricidad, o sea, si tienen un único modelo salvo isomorfismos.

Sin embargo, no creo que deba deducirse de aquí que los griegos desconocieran el rigor en el sentido que nosotros le damos. Las modificaciones necesarias para hacer rigurosa su teoría eran muy grandes, mientras que la imagen física garantizaba que el razonamiento era finalmente correcto (supuestos añadidos los axiomas pertinentes). Quizás no se consideraba el problema de los fundamentos tan importante frente a otros problemas más urgentes en el momento.

En todo caso, las construcciones de finales del siglo XIX le dan la razón a Euclides y hacen ver que su idea se podía realizar con todo rigor.

## 2. LA ARITMETIZACION DEL ANALISIS.

Hacia la segunda mitad del siglo XIX los analistas vieron la necesidad de “aritmetizar el análisis”. Se trataba de eliminar toda apelación a la intuición geométrica en el análisis Matemático, dando a éste, en su lugar, una fundamentación aritmética.

---

3. Carroll, “Euclid and his Modern Rivals”, p. 43.

4. R. Torretti, p. 189.

El problema fundamental era dar una definición del número real, concepto que está estudiado en el libro V de Euclides. Suele considerarse este libro, donde desarrolla una teoría debida a Eudoxo, como uno de los mejores de Euclides; surge pues la pregunta de por qué era necesaria la nueva fundamentación. En mi opinión, el problema está en que Euclides basaba su definición en el concepto de magnitud, haciendo una teoría general de la medida de magnitudes, pero representándolas siempre, en sus figuras, por longitudes. Así se hacía depender el concepto de número real de toda la Geometría.

En el siglo pasado el concepto de número real se fundamentó en el de número natural. Podemos decir que el concepto es el mismo de Eudoxo, pero presentado en otra forma. Hacia 1870 se dan varias construcciones por Cantor, Dedekind, Meray y Weierstrass. Fruto de estas investigaciones es la primera fundamentación axiomática del concepto de número natural, hecha por Dedekind en 1880 y revisada por Peano en 1899. Aunque retrasada en el tiempo, una exposición completamente rigurosa de todo el desarrollo está contenida en el libro de Landau (1930) "Fundamentos del Análisis".

Como se sabe, los axiomas de Peano son cinco:

1. 1 es un número natural.
2. A cada número natural  $x$  le corresponde otro, que llamamos su siguiente y designamos por  $x'$ .
3. El siguiente de todo número natural es distinto de 1.
4. De ser el siguiente de  $x$  igual al siguiente de  $y$  se sigue que  $x = y$ .
5. Axioma de Inducción: Sea  $M$  un conjunto de números naturales con las propiedades:

(a) 1 pertenece a  $M$ .

(b) Si  $x$  pertenece a  $M$ , también  $x'$  pertenece a  $M$ .

Entonces  $M$  contiene a todos los números naturales.

De nuevo nos preguntamos de dónde vienen los axiomas; ciertamente no de la experiencia, porque ¿qué experiencia nos dice que 1 es un número natural?. El siguiente de 3 es 4, que es distinto de 1. Puede que esto sea una experiencia; pero el verdadero axioma es aquí el de inducción y, desde luego, no es la experiencia la que lo dicta, sino la idea de una sucesión bien ordenada. No cabe duda de que pueden contrastarse con la experiencia los resultados del axioma de inducción, pero también es evidente que, cuando se admite se hace por la idea que se tiene de la sucesión de números naturales. Aquí la idea de la experiencia está todavía más lejos que en la Geometría.

Marginalmente, quiero hacer constar que, a pesar de todas las precauciones tomadas para hacer el razonamiento riguroso, en los axiomas de Peano hay suposiciones sin especificar. En el axioma 5 se presupone una teoría de conjuntos. Esto puede obviarse cambiando ligeramente el contenido del axioma 5, mientras sólo tratemos de números naturales. Pero la cosa es diferente al tratar de los

números reales, pues estos aparecen como conjuntos infinitos de pares de números naturales. Nos encontramos con que surge el infinito de manera insoslayable al definir el concepto más aplicable y aplicado de la Matemática: el de número real. En el número real y en la medida se basa toda la ciencia positiva experimental <sup>5</sup>.

### 3. LA TEORÍA INTUITIVA DE CONJUNTOS.

Si bien en la Geometría y en la Aritmética los axiomas no son experimentales, sí parecen serlos los conceptos básicos de punto, recta, circunferencia, número natural y quizás, incluso, el de número real. En la siguiente teoría que consideramos, la Teoría de Conjuntos, esto no ocurre.

Esta teoría tiene un creador: Cantor. Aunque los ejemplos primeros y principales de conjuntos están tomadas de la Matemática anterior, el concepto de conjunto se independiza rápidamente. A la teoría de Cantor se le llama intuitiva (naive), en el sentido de que no surge como teoría axiomática, sino que a él le aparece como una realidad exterior, pero una realidad exterior no física. No todos los matemáticos reconocen este mundo de Cantor y su teoría tiene sus adversarios, entre los que el más destacado es el matemático alemán Kronecker; y también sus partidarios, como Dedekind.

La falta de comprensión hacia estas ideas de Cantor es natural. De hecho, el menor calificativo que se puede aplicar a sus ideas es el de místicas. Así Cantor cita frecuentemente a Santo Tomás, San Agustín y la Biblia para fundamentar con una base religiosa su teoría y defenderla de ataques <sup>6</sup>. En varios de sus escritos trata de los argumentos de Santo Tomás contra la posible existencia de una creación infinita. Por ejemplo, son suyas estas palabras: <sup>7</sup>

“Que debe admitirse la existencia de una ‘creación infinita’ puede probarse de muchos modos ....

Una demostración proviene del concepto de Dios. De la máxima completitud de la esencia de Dios podemos concluir que es posible para El crear una *ordenación transfinita*. Así pues, en virtud de Su pura bondad y majestad, podemos concluir que actualmente hay creado un transfinito”.

Y también, en otro lugar: <sup>8</sup>

“Todos los números cardinales finitos están, así pues, presentes distinta

5. Alguien podría pensar que se podría evitar el uso del número real, pues el resultado de toda medida es un número racional. Pero el problema es más hondo: Si queremos obtener los resultados, que aplicamos en la práctica, de existencia de soluciones, de supremos, de ínfimos, etc... no tenemos más remedio que añadir el número real con toda su potencia.

6. De paso debemos decir que Cantor dominaba el latín y que p. ej. su tesis “De equationibus secundi gradus indeterminatis”, Berlín (1867), está escrita en esta lengua.

7. Cantor, Obras p. 400, citado en Hallet p. 23.

8. Cantor, citado por Hallet, p. 36. Carta al padre Ignatius Jeller, Whitsun 1888.

y simultáneamente en el intelecto de Dios. Forman en su totalidad una variedad, una cosa por sí misma, delimitada del contenido restante del intelecto de Dios, y esta cosa es ella misma, de nuevo, un objeto del conocimiento de Dios”.

Pero la principal dificultad con la que se encuentra Cantor es la existencia de contradicciones en la teoría. La primera contradicción fue descubierta por Cantor en 1895, aunque no se publicó hasta 1932: Se considera el conjunto A de todos los conjuntos. Claramente su cardinal es el mayor posible; pero por un conocido teorema de Cantor, tenemos que el conjunto de las partes de A tiene cardinal estrictamente mayor. Al menos desde el año 1899 tiene Cantor una respuesta coherente a la contradicción <sup>9</sup>.

Estas contradicciones surgen al considerar ciertos conjuntos, como el conjunto de todos los números ordinales, mientras que otras colecciones no parecen ofrecer ninguna dificultad. Cantor distingue entonces entre dos clases de multiplicidades. Para una clase, la hipótesis de que todos sus elementos estén dados simultáneamente conduce a una contradicción. Es imposible considerar estas multiplicidades como unidades, como cosas acabadas, y a estas las llama absolutamente infinitas o multiplicidades inconsistentes. Las otras, las que pueden pensarse como una cosa acabada, las llama conjuntos. Finalmente caracteriza las multiplicidades absolutamente infinitas como aquellas que contienen una subcolección equivalente a la sucesión de los ordinales. Esta es la teoría de la limitación del tamaño, que es la solución que se ha adoptado oficialmente’.

#### 4. LA TEORIA AXIOMATICA DE CONJUNTOS.

Era obvio que las paradojas debían recibir una respuesta más contundente que los razonamientos místicos y teológicos de Cantor. Esta respuesta fue dada por medio de una axiomatización de la teoría. Es claro que una axiomática permite distinguir claramente lo demostrable de lo que no lo es, y evitar así las paradojas y contradicciones de la manera más explícita.

Esta axiomática fue primero dada por Zermelo en 1908, y retocada en algunos puntos por Fraenkel y Skolem en 1922. Desde estos años hasta nuestros días, la axiomática de Zermelo Fraenkel o ZFC, como se le suele llamar, ha ido imponiéndose de tal modo que hoy en día pueden considerarse los axiomas de *La Matemática*. Sin embargo, esta axiomática no fue aceptada por todos, y el artículo de Zermelo de 1904 sobre la posibilidad de bien ordenar cualquier conjunto levantó una polémica, en la que intervinieron Zermelo, Borel, Lebesgue, Hadmard,

---

9. Confrontar Hallet, p. 168.

Baire, Poincaré, etc...<sup>10</sup>. Los axiomas más polémicos son tres: *el del infinito*, *el de la potencia* y *el de elección*. Daremos un breve repaso a cada uno.

Empezaremos por el *axioma del infinito*. Afirma que existe un conjunto infinito o, lo que viene a ser lo mismo, existe el conjunto de los números naturales. Ya vimos como Cantor expresa su creencia en el axioma fundamentándola en la existencia de Dios. Sus predecesores no lo mejoran demasiado. Así Dedekind, junto con Bolzano, creadores de la definición de conjunto infinito, dan una 'demostración' del axioma digna de recordarse y que Dedekind atribuye a Bolzano.<sup>11</sup> Considera el conjunto de todas las cosas que pueden ser objeto de su pensamiento y, después de un *razonamiento*, concluye que satisface su definición de infinito.

A su vez Cantor, en defensa del axioma, cita a San Agustín en la 'La ciudad de Dios'.<sup>12</sup>

"Cada número esta definido por su carácter único propio, de modo que ningún número es igual a otro. Son todos distintos entre sí y los miembros individuales son finitos, pero como una clase, son infinitos.

¿Significa ésto que Dios no conoce todos los números, por su infinitud?  
¿Llega el conocimiento de Dios hasta una cierta suma, y acaba allí?  
Nadie será tan loco como para decir eso.

No dudemos nunca, pues, que cada número es conocido por aquél 'cuya inteligencia no puede ser numerada'. Aunque la serie infinita de los números no puede ser numerada, esta infinitud de números no está fuera de la comprensión de Él 'cuya inteligencia no puede ser numerada'. Y así, si lo que es comprendido en el conocimiento está abarcado por ese conocimiento, y por lo tanto es finito, debe seguirse que cada infinito es, en un modo que no podemos expresar, hecho finito para Dios, porque no puede estar fuera de su conocimiento".

Hasta aquí los motivos que citan los primeros que defendieron el axioma del infinito; tampoco faltan los que lo negaron. En primer lugar encontramos que Aristóteles no admite el infinito actual. Santo Tomás (citado también por Cantor, que no podía dejarlo sin contestación) niega la posibilidad, incluso para Dios, del infinito actual, basando su razonamiento en una cita de la Biblia:<sup>13</sup>

"pero todo lo dispusiste con medida, número y peso"

y concluye que, si todo está numerado, no puede ser infinito.<sup>14</sup> La respuesta de Cantor es obvia: él puede 'contar' conjuntos infinitos mediante ordinales transfinitos.

10. Está recogida en varios lugares: Obras de Borel y libro de Moore.

11. Dedekind, p. 64.

12. San Agustín, 'Ciudad de Dios', Libro XII cap. 19 (Cap. 18 en algunas ediciones). Citado por Hallet, p. 35-36.

13. Libro de la Sabiduría, Cap. 11, versículo 21.

14. Santo Tomás de Aquino, Summa Theológica', parte I, cuestión 7, artículo 4. Citado por Hallet, p. 22 y por Rucker p. 49.

Pero no sólo entre los teólogos, sino, lo que parece más interesante, los matemáticos, en general, no admitieron el infinito. Es bien sabido cómo enuncia Euclides la existencia de infinitos números primos sin mencionar el infinito: <sup>15</sup>

PROPOSICION 20. Los números primos son más que cualquier multitud asignada de números primos.

El propio Gauss, en una carta a Schumacher, afirma: <sup>16</sup>

“En primer lugar protesto contra el uso de las magnitudes infinitas como algo acabado, lo que nunca está permitido en Matemáticas. El infinito no es más que una manera de hablar, como se habla propiamente de límites, que ciertas variables pueden aproximar arbitrariamente, mientras que otras crecen sin límite... los hombres finitos no deberían asumir algo infinito como dado y comprensible por medio de su intuición ordinaria.”

Frente a estas posiciones ante el infinito, contrasta la posición de Zermelo, que es la del matemático de hoy en día. Él es el primero en ver claramente que la existencia de conjuntos infinitos debe ser admitida mediante un axioma. Para él la Teoría de Conjuntos no necesita este axioma para desarrollar la aritmética elemental, pero para desarrollar el Análisis y la Teoría de Funciones es indispensable el infinito actual <sup>17</sup>. Por tanto, la admisión del axioma del infinito se debe fundamentalmente a este hecho, que se constata al precisar los axiomas de la Teoría de Conjuntos: gran parte de la Matemática anterior a Cantor y la más fértil en aplicaciones, reposa, de manera ineludible, en este axioma.

El *axioma de la potencia* afirma que, si  $A$  es un conjunto, todos sus subconjuntos también forman un conjunto  $P(A)$ .

La dificultad con este axioma es más sutil: ¿qué significa la palabra todos cuando el conjunto  $A$  es infinito? Esta dificultad fue señalada por Poincaré. Ciertos subconjuntos  $B \subset A$  pueden estar definidos haciendo alusión al conjunto de todas las partes de  $A$ . Estas definiciones serían ilegítimas pues se presupone  $B$  para definir  $B$ . Por tanto, no está definido el conjunto de las partes de  $A$ , sino que es más bien un proceso de construcción.

Esto lo expresa claramente Baire <sup>18</sup> en una carta a Hadamard:

“En particular, porque un conjunto esté dado (estaremos de acuerdo en decir, por ejemplo, que nos es dado el conjunto de las sucesiones de enteros positivos), es falso para mí considerar las partes de este conjunto como dadas.”

Análogamente se expresa Lusin negando la existencia del conjunto de las

---

15. Euclides, Libro IX, Proposición 20.

16. Gauss, Obras, tomo VIII, p 216 y siguientes. Citado por Van Dalen y Monna, p. 13

17. E. Zermelo, 'Sur les ensembles finies et le principe de l'induction complète'. Incluido en Heinzmann, p. 155-156.

18. R. Baire, Carta a Hadamard. Incluida en Moore, p. 313

partes de  $R$  (el conjunto de los números reales). Otros consideran que este es el axioma de Zermelo que más dudas les ofrece.<sup>19</sup>

Sin embargo, fue Poincaré el primero que lo expresó:<sup>20</sup>

“Es la creencia en la existencia del infinito actual la que ha dado nacimiento a estas definiciones no predicativas. Me explico: en esta definiciones figura la palabra *todos*, como lo vemos en los ejemplos citados. La palabra *todos* tiene un sentido bien claro cuando se trata de un número finito de objetos; para que tenga también uno, cuando los objetos son en número infinito, sería necesario que hubiese un infinito actual. De otro modo, *todos* estos objetos no podrán ser concebidos como dados antes de su definición y, entonces, si la definición de una noción  $N$  depende de todos los objetos  $A$ , puede ser tachada de círculo vicioso, si entre los objetos  $A$ , los hay que no pueden ser definidos sin hacer intervenir la noción  $N$  misma.”

Esta crítica de que el axioma de las partes no es predicativo y, por tanto, no es legítimo se aplica también a la Aritmética. No es correcto decir que la inducción solamente envuelve a los números de 1 a  $n$ . La propiedad que se establece por inducción para  $n$  puede llevar la palabra *todos* aplicada a los números naturales.

Nelson<sup>21</sup> ha construido una Aritmética predicativa aminorando la potencia del axioma de la inducción. En esta teoría no es posible probar que  $2^n$  está definido para todo  $n$ , en ella se debe distinguir entre los números expresados en el sistema decimal y los números denotados por sucesiones de palotes. Hacemos usualmente la hipótesis de que podemos escribir cualquier número natural en los dos sistemas, pero eso es obviamente falso.

A pesar de las dudas levantadas por el axioma de la potencia, le ocurre, como al del infinito, que sin él no podrían contruirse los números reales; así pues, las Matemáticas clásicas nos obligan a aceptarlo.

Finalmente llegamos al axioma que más polémica levantó, el de *elección*, aunque, como veremos, es el más inocuo de los tres. El libro de Moore está dedicado exclusivamente a explicar las controversias sobre este axioma, y es muy interesante la correspondencia entre Hadamard, Borel, Baire y Lebesgue sobre el tema, recogida en el libro de Moore y en las Obras Completas de Borel. El axioma afirma que, si tenemos un conjunto  $S$ , existe una función  $f$  que asocia a cada subconjunto no vacío  $A$  de  $S$  un único miembro  $f(A)$  de  $A$ . En otras palabras, puede escogerse un elemento de cada parte no vacía de  $S$ . Hoy día este axioma está tan universalmente aceptado que no entendemos que, en la época en que se enunció, la mayoría de los matemáticos lo rechazara por

19. F. Gonseth, p. 235.

20. H. Poincaré, ‘Les mathématiques et la logique’. Publicado por Heinemann, p. 79-104 (en particular p. 103).

21. Nelson, *Predicative Arithmetic*.

falso. Gauss <sup>22</sup> lo necesitó en cierta ocasión y no lo dio por supuesto sino que lo demostró en el caso concreto que manejaba (lo que era posible en ese caso). Este axioma permite demostrar la existencia de ciertos conjuntos sin definir ninguno en concreto. Esta es la razón fundamental por la que lo rechazan los matemáticos de la época; pero es notable que ellos mismos a veces lo usaban sin darse cuenta. Además, por si fuera poco, conduce a resultados paradójicos. Un ejemplo es la que, olvidándose de la aportación fundamental de Hausdorff, se llama paradoja de Banach-Tarski: Podemos descomponer una bola de radio unidad en un número finito de partes que, colocándolas convenientemente, compongan exactamente una bola de radio... dos! o un millón o dos bolas de radio un millón, etc...

Esto es un 'teorema' en la Matemática actual, donde el 'truco' es esencialmente el axioma de elección.

Avanzando un poco en el tiempo, Gödel demuestra (1938)<sup>23</sup> la consistencia del axioma de elección. Es decir, si sólo admitimos los restantes axiomas, basta con que sustituyamos la palabra conjunto por la de conjunto constructible (un concepto muy técnico en el que no debe uno dejarse llevar demasiado por el nombre constructible) para obtener una teoría en la que valen todos los axiomas anteriores y, además, el de elección. Luego con el axioma de elección no se añaden contradicciones a dicha teoría. Este resultado de Gödel influyó mucho en la aceptación del axioma. Hoy en día es fácil probar que a ninguno de los otros dos axiomas le ocurre lo mismo que al de elección.

En definitiva, la axiomática de la teoría de conjuntos no puede decirse que se imponga por consenso. Los axiomas los propone Zermelo tratando de obtener los principios básicos en los que poder fundamentar rigurosamente el mundo intuitivo de Cantor. En un principio la aceptación fue muy escasa, pero finalmente no se encontró otra teoría alternativa que respetase lo que llamaban 'las verdaderas Matemáticas'. Esto es lo que motivó la aceptación de los axiomas.

## **5. LA AXIOMATIZACION DE LA LOGICA.**

Volvemos ahora atrás en el tiempo para analizar el desarrollo axiomático de la lógica. En 1879 publica Frege su libro *Begriffsschrift* (Escritura de las ideas). En este libro fundamental están recogidas, por primera vez, las reglas de la Lógica. El objetivo de Frege es fundamentar la Aritmética, pero, para hacerlo, siente la necesidad de aclarar qué cosa es un razonamiento correcto.

Puede decirse que, desde Aristóteles, la Lógica se había quedado estancada y nadie parecía apreciar que la lógica de Aristóteles no cubría el razonamiento matemático.

---

22. *Disquisitiones Arithmeticae*. Citado por Moore, p. 12

23. K. Gödel, *Obras*, p. 191-293.

El libro de Frege es totalmente renovador: abandona el análisis de las proposiciones en sujeto y predicado para descomponerlas en función y argumento. Presenta el cálculo proposicional y la teoría de la cuantificación. Surge aquí, por primera vez, la idea de que comprobar si un razonamiento es correcto es una tarea mecánica para la que se dispone de un algoritmo.

En el libro de Hilbert y Ackermann, publicado en 1928, está expuesta con claridad la Lógica de primer orden, con las notaciones que hoy son habituales, y se pregunta si toda fórmula válida es demostrable, es decir, si se dispone ya de todas las reglas de deducción. La respuesta está dada en la tesis doctoral de Gödel (1930): 'La Lógica de primer orden es completa'<sup>24</sup>. Este es un resultado de una importancia capital: ya que nos da una demostración de que las leyes de la Lógica son las enunciadas por Frege, sin faltar ninguna. Desde este momento se dispone de un alfabeto finito con el que puede escribirse cualquier proposición matemática como una sucesión finita de símbolos y de dos algoritmos. El primer algoritmo reconoce, en tiempo finito, qué sucesiones finitas de símbolos son proposiciones, es decir, cuales son construcciones gramaticalmente correctas. El segundo algoritmo reconoce qué sucesiones de proposiciones son demostraciones válidas.

Debe entenderse bien que no existe algoritmo eficiente que escriba las demostraciones, pero sí existe un algoritmo para comprobar que una demostración ya dada es correcta. El mejor algoritmo conocido para encontrar demostraciones sería escribir todas las combinaciones posibles de símbolos y analizarlas para ver si se encuentra la demostración buscada, lo que es claramente inviable por dificultades de tiempo. También queda claro que un razonamiento lógico, una vez sustituidas las definiciones, no se reduce a una identidad. Esto es algo que se expresa, a veces, diciendo que todo razonamiento lógico conduce a una tautología, idea que han compartido matemáticos tan importante como H. Poincaré. Sencillamente esto no es así: no existe algoritmo que decida en tiempo finito si cualquier proposición es verdadera o no. Por tanto, una demostración es algo que merece ser conservado y ordenado, con objeto de tener acceso a ella cuando sea necesario.

Debemos añadir aquí que la lógica desarrollada por Frege para aplicarla a la Aritmética no es admitida con unanimidad. Para Brouwer y la escuela intuicionista, ésta es la lógica de los conjuntos finitos. La lógica debe alterarse para tratar la Aritmética, pues el dominio de los naturales es infinito y no es aplicable la ley del tercero excluido. Heyting hace, en su libro 'Intuicionismo', una exposición lúcida de estas ideas, las cuales llevan a no admitir gran parte de la Matemática clásica, por lo que no han tenido éxito entre los matemáticos. La lógica de Frege es la lógica que conviene a los que admiten el infinito actual y, por tanto, es hoy día universalmente admitida.

Debemos mencionar otra escuela, el logicismo, que trataba de reducir la Matemática a la Lógica. Si entendemos la Lógica como la ciencia sin hipótesis,

---

24. K. Gödel, 'La suficiencia de los axiomas del cálculo lógico de primer orden', Obras, p. 20-34.

habríamos de reducirla a la lógica de primer orden, y la Matemática a la teoría de Zermelo. Hechas estas reducciones, es claro que deben hacerse hipótesis, por ejemplo, la existencia del infinito, para desarrollar la Matemática.

## 6. EL PROGRAMA DE HILBERT.

Las dudas que despertaba la teoría de conjuntos y las que provenían del intuicionismo (que negaba la validez de la lógica (clásica) de primer orden para manejar conjuntos infinitos) indujeron a Hilbert a programar la siguiente solución:

Puesto que el razonamiento sólo requiere manipular símbolos en número finito, según unas reglas precisas, podría ser posible razonar de manera finitista (es decir, situándose en el punto de vista de los intuicionistas) y demostrar que la Teoría de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel no tiene contradicciones, o, lo que es lo mismo, no existe una estructura finita de símbolos que sea una demostración, en la teoría ZFC, de una proposición y de su negación. Esto probaría que el infinito no es más que un modo de hablar cómodo, que no añade nada, pero simplifica la exposición. Veámoslo con más detalle.

Si  $T$  es una teoría que contiene a la Aritmética, podemos separar una parte de  $T$  que llamaremos positiva. Son aquellas fórmulas que pueden escribirse en la forma

$$(\forall n \in \mathbb{N})(f(n)=0),$$

donde  $f$  designa una función  $f:\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  para la que existe un algoritmo que calcula  $f(n)$  en tiempo finito, y comprobar si  $f(n)=0$ , o no. En lo que sigue, sólo consideramos las teorías  $T$  tales que este cálculo proporciona en  $T$  una demostración de que  $f(n)=0$ , o de que  $\neg(f(n)=0)$ , según sea el caso. Ahora una fórmula positiva  $(\forall n \in \mathbb{N})(f(n)=0)$ , se dirá *incorrecta* si existe un  $n$  concreto para el que  $f(n) \neq 0$ . Es decir, las fórmulas positivas pueden ser comprobadas en la experiencia, y se dicen incorrectas si son falsas experimentalmente.

De todo lo anterior sigue que una fórmula positiva de  $T$  demostrable en  $T$  no puede ser incorrecta a menos que  $T$  sea contradictoria. Así pues, si con el programa de Hilbert se prueba que  $T$  no es contradictoria, entonces las predicciones de  $T$ , es decir, sus fórmulas positivas y demostrables serán correctas. Quedarían así justificados los razonamientos hechos en  $T$ .

## 7. EL RESULTADO DE GODEL.

En el año 1930 Gödel <sup>25</sup> demostró que era imposible completar el programa de Hilbert. En primer lugar demostró que, en cualquier teoría axiomática consistente, suficientemente amplia para que contenga a la Aritmética y

suficientemente precisa para que pueda llamarse teoría axiomática, existen proposiciones aritméticas, de las que hemos llamado positivas, que son indecidibles. Es decir, ni esta proposición ni su negación pueden demostrarse en la teoría.

La demostración de Gödel está inspirada en la famosa paradoja de Epiménides, que surge al analizar la frase 'Esta sentencia es falsa'. Así, Gödel construye una sentencia  $G$  que, adecuadamente interpretada, dice algo así como 'Esta sentencia no puede probarse en la teoría axiomática  $T$ '.

Gödel prueba que su sentencia  $G$  es indecidible en la teoría  $T$  pero, a la vez, al leer su demostración, se tiene la convicción de que los axiomas de  $T$  no son suficientes, y debe añadirseles, precisamente, la fórmula que Gödel demuestra que es indecidible. A continuación, a la nueva teoría  $T'$ , obtenida añadiendo a  $T$  este axioma, se le puede volver a aplicar su teorema y así indefinidamente.

La parte más difícil del teorema de Gödel consiste en construir una sentencia  $G$  que pueda referirse a ella misma. Es claro que  $G$  no puede citarse directamente, pues, para ello, tendría que ser de longitud infinita. En su lugar,  $G$  menciona una sentencia que cumple ciertas condiciones y que, a posteriori, resulta ser la propia  $G$ .

El trabajo de Gödel tiene una segunda parte. En ella construye, para cada teoría axiomática  $T$ , una sentencia  $\text{Con}(T)$  que afirma que  $T$  es consistente. A continuación se demuestra que, si  $T$  es consistente, la sentencia  $\text{Con}(T)$  es indecidible en  $T$ . Dicho de otra forma, si una teoría es consistente, entonces no es suficientemente fuerte para probar su misma consistencia. Es este resultado de Gödel el que impide desarrollar el programa de Hilbert.

## 8. LA MATEMATICA COMO CIENCIA EMPIRICA.

Observemos que  $\text{Con}(T)$  tiene la forma de una proposición positiva: para todo  $n$ ,  $n$  no es demostración de una contradicción en  $T$ . La parte positiva de  $T$  es consecuencia de  $\text{Con}(T)$ , y  $\text{Con}(T)$  es el menor resultado positivo que no puede probarse en  $T$ .

Así, cada teoría axiomática reposa en la hipótesis empírica de que  $T$  no es contradictoria. Esta hipótesis es empírica en el mismo sentido que las teorías físicas. Comprobamos  $\text{Con}(T)$  para  $n = 1, 2, \dots, N$  y concluimos admitiendo  $\text{Con}(T)$ . Incluso la hipótesis de la existencia de conjuntos infinitos se convierte, así, en una hipótesis empírica, depurada de toda metafísica.

Se llega pues, por el resultado de Gödel, a que, en vez de la Matemática autosuficiente que esperaba Hilbert, se obtiene la Matemática entendida como ciencia experimental. Gödel<sup>25</sup> apunta esta posibilidad:

25. K. Gödel, 'Sobre sentencias formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines'. Obras, p. 55-89

26. K. Gödel, '¿Que es el problema del continuo de Cantor?', Obras, p. 340-362. El trozo está en la p. 361.

“El caso más simple de aplicación del criterio que discutimos surge cuando algún axioma de la Teoría de Conjuntos tiene consecuencias numéricas verificables por computación hasta cualquier número natural dado.”

Existe otro tipo de comprobación experimental de Con (T): precisamente que al desarrollar la teoría no se encuentren contradicciones. Pero debemos tener precaución con estos ‘métodos’ experimentales aplicados a la Matemática. Veamos un ejemplo:

En el año 1859, Riemann <sup>27</sup> presenta su artículo ‘Sobre el número de primos menores que una magnitud dada’. Son ocho páginas que han dado después trabajo a los matemáticos hasta nuestros días. Él sólo da un resumen de sus investigaciones, y las afirmaciones allí contenidas se han ido demostrando una a una (hay razones para pensar que él sabía demostrarlas). Pero también plantea un problema: ‘Los ceros no triviales de la función  $\zeta(s)$  están todos situados en la recta  $\Re(s)=\frac{1}{2}$ ’. Se sabe que hay infinitos de estos ceros no triviales, y se tiene evidencia de que Riemann demostró que el primer cero estaba realmente en la recta. Hoy día, con la ayuda de los ordenadores, se ha podido demostrar <sup>28</sup> que los 1.500.000.001 primeros ceros están todos situados en esa recta, pero nadie piensa que esto es razón suficiente para admitir el resultado; y eso a pesar de que son muchos los resultados que se han demostrado, admitiendo la hipótesis de Riemann, sin llegar a contradicciones.

¿Por qué no son suficientes estos datos para admitir la hipótesis?. Pues bien, veamos por qué. Existe una hipótesis más fuerte que la de Riemann, debida a Mertens:

Llamemos rojo a un número que es producto de un número de par de factores primos, y azul a uno que es producto de un número impar de factores. La hipótesis de Mertens afirma que, para todo número natural  $n$ , la diferencia entre el número de números azules y rojos comprendidos entre 2 y  $n$  es menor que  $\sqrt{n}$ . De hecho, este número es  $< \frac{1}{2}\sqrt{n}$ , para todo  $n$  comprendido entre 200 y 7.725.038.629, pero no para este último número. La conjetura de Mertens se ha demostrado que es falsa para cierto  $n < 3.21 \times 10^{64}$ .

## 9. ¿COMO SE ELIGEN LOS AXIOMAS?.

En la práctica solemos tener ya una teoría matemática, y tratamos de buscar unos axiomas que permitan desarrollarla rigurosamente. Eso fue lo que hizo Zermelo con la Teoría de Conjuntos, Dedekind con la Aritmética y Euclides con la Geometría. En el caso particular de la Teoría de conjuntos, la elección puede parecer un poco caprichosa; eso le parecía a Poincaré<sup>29</sup>, que pedía se añadiera otro axioma de Comprensión: Si  $P(x)$  es una propiedad,  $\{x \mid P(x)\}$  es un conjunto.

---

27.. Hay traducción inglesa contenida en Edwards.

28.. S. Wagon, ¿Where are the zeros of zeta of  $s$ ?, Math. Intelligencer 8 (1986), 57-62.

29. Poincaré, ¿‘La logique de l’infinie’, §5. Incluido en Heinzmann, p. 246-252.

Naturalmente Zermelo no lo hizo, pues su teoría hubiera resultado contradictoria. Esta es la comprobación experimental de una teoría matemática: el hecho de poder desarrollarla sin encontrar contradicciones; y es esto lo que convence a los matemáticos de que la teoría es consistente.

Pero la axiomatización es sólo el último paso en el desarrollo de una teoría. El verdadero avance se produce cuando aparece la 'intuición', que hace ver un nuevo mundo. En la historia de la Matemática se han sucedido tres 'intuiciones' de este tipo: Geometría, Aritmética y Teoría de Conjuntos. En el caso de la Teoría de Conjuntos existe otra razón, además de que su parte positiva es más fuerte, que hace a la teoría ideal como fundamento de la Matemática. En cualquier Ciencia, pensemos en la Zoología, se estudian unos objetos, los animales en nuestro ejemplo. La Ciencia clasifica y define clases: los vertebrados, los peces, etc.... pero nadie confunde estas clases con los animales objetos de estudio. En la Teoría de Conjuntos también se da esta distinción entre conjunto y clase, pero, precisamente, la Teoría de Conjuntos nace al tratar de confundir estas dos nociones. Si se confunden totalmente se obtiene el Axioma de Comprensión y la contradicción subsiguiente; por ello lo que se hace es confundir los dos conceptos hasta donde se pueda, sin provocar la contradicción; ello proporciona una teoría muy cómoda, pues permite identificar prácticamente todo con conjuntos. Se llega así a obtener una teoría en la que puede probarse que cada teoría consistente tiene un modelo; y podemos, pues, estudiar cualquier cosa identificándola con un conjunto; esto es lo que hace ideal a la Teoría de Conjuntos como fundamento de la Matemática y así, la Geometría y la Aritmética pueden considerarse como partes de la Teoría de Conjuntos.

## 10. SOBRE LA VERDAD DE LOS AXIOMAS.

El axioma del infinito afirma que existe un conjunto infinito pero, ¿existe? La mayor parte de los matemáticos afirma, hoy día, que éste es un teorema de la Matemática, pero niegan todo valor a la afirmación.

A este extraño estado de cosa han llevado los desarrollos últimos de la teoría. Cantor se propuso el problema del continuo, es decir, se preguntaba cuantos puntos tiene una recta. Gödel y Cohen demostraron que la cuestión es indecidible en ZFC. Posteriormente, los métodos de estos matemáticos permitieron demostrar que muchos problemas planteados en la Matemática eran indecidibles; es decir, son problemas importantes, pero podemos admitir cualquier solución a ellos sin llegar a contradicción. Todo esto ha provocado que los matemáticos se habitúen a que ciertas proposiciones no son verdaderas ni falsas dentro de su teoría. Los axiomas de Zermelo no son suficientes para desarrollar la teoría, pero en vez de ver claro qué axiomas debemos añadir, sabemos que podemos añadir A o su negación a nuestro gusto; se obtienen así diversas matemáticas posibles.

Muchos matemáticos han adoptado una posición cercana al logicismo.

Piensan que la única cuestión a la que se enfrenta el matemático no es si los axiomas de los que parte o las conclusiones que de ellos deduce son verdaderos, sino si las conclusiones obtenidas son realmente las *conclusiones lógicas necesarias* de las hipótesis iniciales. Esta postura sería válida si estos matemáticos tuvieran la costumbre de especificar en sus teoremas todas sus hipótesis. pero el hecho es que ellos aceptan el axioma del infinito o el de la potencia sin jamás creerse en el deber de consignarlo; y ya hemos dicho que estos axiomas son imprescindibles para obtener todas las consecuencias positivas de ZFC. Puede alguien insistir en que, al escribir una proposición, entiende implícitamente que lo que afirma es que esa proposición es un teorema en la teoría ZFC y que, por tanto, ha enunciado todas sus hipótesis. Esto es verdad, pero, al aceptar la teoría ZFC, lo hace creyendo que no llevará a contradicción, pues en caso contrario trabajaría con otros axiomas más pobres. Insistamos que, en todo caso, la confirmación experimental de que ZFC no contiene contradicciones es abrumadora y debe ser 'explicada'.

Volvamos al caso del axioma del infinito I. Admitiendo los demás axiomas, podemos aceptar I o negarlo; estas dos opciones están lejos de ser equivalentes:

En primer lugar, la teoría que niega el infinito tiene una parte positiva más pobre; es decir, predice menos resultados comprobables. París y Harrington <sup>30</sup> han obtenido un resultado aritmético positivo no demasiado complicado, que sólo es demostrable aceptando I y no negándolo. La existencia de estos resultados es también consecuencia del teorema de Gödel.

En segundo lugar, la teoría que acepta I permite construir el número real y la que lo niega no. Históricamente es esta segunda razón la que más peso ha tenido para aceptar I, aunque Cantor aceptaba el axioma porque cuadraba dentro de su imagen mental, independientemente de otra consideración.

Es posible obtener una Aritmética que no admita el infinito pero tenga una parte positiva tan fuerte como ZFC; basta añadir a la Aritmética de Peano el axioma Con (ZF). Esta teoría podría satisfacer a alguien que no quisiera aceptar el infinito, pero tiene dos inconvenientes:

(a) No se puede construir el número real de manera natural, aunque sí se puede definir en un sentido muy alejado del intuitivo.

(b) ¿Cómo se justifica el axioma Con (Z F), que, en el fondo, está aludiendo al infinito veladamente?

Puede que algún día alguien construya una aritmética con unos axiomas naturales y que tenga como teorema a Con (ZF); quizás ese día se podría hablar de que el infinito ya no es necesario.

Goodman <sup>31</sup> ha enunciado un principio que debe satisfacer cualquier

---

30. J. Paris y L. Harrington, 'A Mathematical Incompleteness in Peano Arithmetic', incluido en Handbook of Mathematical Logic, p 1133-1142

31. Goodman, Mathematics as an objective Science, Amer. Math. Monthly 86 (1979), 540-551. Incluido en Tymoczko p. 79-94.

explicación de la realidad, el principio de objetividad: 'Cualquier ente que sea prácticamente real debe ser aceptado como objetivamente real'. Según este principio, debemos aceptar el infinito como objetivamente real, pues no podemos explicar la realidad sin hablar de él. Negar la existencia del infinito, en el estado actual de la ciencia, es algo parecido a negar la existencia del electrón; los dos son conceptos contruidos para explicar el mundo exterior, y tan difícil sería explicarlo sin el uno como sin el otro.

La postura de aceptar los entes matemáticos como reales recibe el nombre de platonismo. Así pensaba Gödel.<sup>32</sup>

“Pero a pesar de la lejanía de la experiencia sensible, tenemos algo parecido a una percepción de los objetos de la Teoría de conjuntos, como se puede ver por el hecho de que los axiomas mismos nos fuerzan a aceptarlos como verdaderos. No veo ninguna razón por la cual debamos tener menos confianza en este tipo de percepción, es decir, en la intuición matemática, que en la percepción sensible, que nos induce a construir teorías físicas y a esperar que futuras percepciones sensibles concuerden con ellas y, además a creer que cuestiones no decidibles por el momento tengan significado y puedan ser decididos en el futuro. Las paradojas de la teoría de conjuntos difícilmente son más preocupantes para la Matemática, que los engaños de los sentidos para la Física. Ya se indicó que pueden darse perfectamente nuevas intuiciones matemáticas que conduzcan a una decisión de problemas tales como la hipótesis del continuo de Cantor.

Debería observarse que la intuición matemática no tiene que ser concebida como una facultad que proporcione un conocimiento *inmediato* de los objetos que le conciernen. Parece más bien que, como en el caso de la experiencia física, *formamos* también nuestros conceptos de estos objetos a partir de algo más que es inmediatamente dado. Sólo que este algo más *no* es aquí, o no principalmente, la sensación. Que, además de las sensaciones, hay algo real e inmediatamente dado se sigue (independientemente de las Matemáticas) del hecho de que incluso nuestros conceptos referentes a los objetos físicos contienen constituyentes cualitativamente diferentes de las sensaciones o meras combinaciones de sensaciones, por ejemplo, el concepto mismo del objeto, mientras que, por otro lado, mediante nuestro pensamiento no podemos crear ningún elemento cualitativamente nuevo, sino sólo reproducir y combinar los que están ya dados. Lo “dado” que subyace a la Matemática está, evidentemente, muy relacionado con los elementos abstractos contenidos en nuestros conceptos empíricos. De esto no se sigue, sin embargo, que los datos de

---

32. K. Gödel, Obras, p 359-361.

este segundo tipo sean algo puramente subjetivo, porque no pueden asociarse con acciones de ciertas cosas exteriores a nuestros órganos sensibles, como Kant afirmaba. Pueden representar más bien un aspecto de realidad objetiva, pero, en oposición a las sensaciones, su presencia en nosotros puede deberse a otro tipo de relación entre la realidad y nosotros mismos.

La cuestión de la existencia objetiva de los objetos de la intuición matemática (que, incidentalmente, es una réplica exacta de la cuestión de la existencia objetiva del mundo exterior) no es, sin embargo, decisiva para el problema que aquí discutimos. El mero hecho psicológico de la existencia de una intuición que es lo bastante clara como para producir los axiomas de la Teoría de Conjuntos y una serie abierta de extensiones de estos, basta para dar sentido a la cuestión de la verdad o falsedad de ideas tales como la hipótesis del continuo de Cantor. Lo que, sin embargo, quizá justifica más que nada la aceptación de este criterio de verdad en la teoría de conjuntos es el hecho de que recurrir a la intuición matemática no es necesario únicamente para obtener respuestas unívocas a preguntas de la teoría de conjuntos transfinita, sino también para resolver problemas de la teoría finitaria de números (del tipo de la conjetura de Goldbach) la significatividad y univocidad de cuyos conceptos apenas se puede poner en duda. Esto se sigue del hecho de que en cada sistema axiomático hay infinitas sentencias indecidibles de este tipo.”

Finalmente, quiero hacer observar que los resultados indecidibles apuntan a dos posibles soluciones. La primera, la que esperaba Gödel, que nuevas intuiciones sobre los conjuntos proporcionen axiomas nuevos que resuelvan los problemas indecidibles. La segunda solución es que nuevas intuiciones lleven a una teoría más fuerte, con lo que toda la matemática anterior quedaría salvada, pero donde los antiguos problemas perderían su sentido; así ocurrió en el pasado con el postulado quinto de Euclides.

## BIBLIOGRAFIA

- [1]. BARWISE, J., "Handbook of Mathematical Logic", North-Holland, Amsterdam, (1977).
- [2]. BONOLA, R., "Non Euclidean Geometry", Dover, New York, (1955).
- [3]. BOREL, E., "Oeuvres", Tomo 3, Editions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, (1972).
- [4]. CANTOR, G., "Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts", Springer, Berlín, (1980).
- [5]. CARROLL, L., "Euclid and his modern rivals", Dover, New York, (1973).
- [6]. DALEN, D. van, y MONNA, A.F., "Sets and integration. An outline of the development", Wolters-Noordhoff, Groningen, Holanda, (1972).
- [7]. DEDEKIND, R., "Essays on the theory of numbers. I Continuity and irrational numbers. II The nature and meaning of numbers ", Dover, New York, (1963)
- [8]. EDWARDS, H.M., " Riemann's Zeta Function", Academic Press, New York, (1974).
- [9]. EUCLID's Elements. Editados por T.L. Heath, 3 vol, Dover, New York, (1956).
- [10]. FRAENKEL, A.A., "Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre", Math. Ann. 86 (1922) 230-237.
- [11]. FRAENKEL, A.A., "Über den Begriff "definit" und die unabhängigheit der Auswahlaxioms", Sitz., Berlín (1922) 253-257, Traducción inglesa en van Heijenoort p. 284-289.
- [12]. GAUSS, C.F., "Gesammelte Abhandlungen", Tomo VIII, Teubner, Leipzig, (1900).
- [13]. GÖDEL, K., "Obras completas", Alianza Editorial, Madrid, (1981).
- [14]. GONSETH, F., "Les fondements des Mathématiques", Blanchard, París, (1926).
- [15]. HALLET, M., "Cantorian Set Theory and Limitation of size", Clarendon Press, Oxford, (1984).
- [16]. HEIJENOORT, van., (Editor), "From Frege to Gödel, A source book in Mathematical Logic 1879-1931", Harvard Univ. Press, London, (1967).
- [17]. HEINZMANN, G., (Editor), "Poincaré, Russell, Zermelo Et Peano", A. Blanchard, Paris, (1986).
- [18]. HEYTING, A., "Introducción al Intuicionismo", Editorial Tecnos, Madrid, (1976).
- [19]. HILBERT, D y ACKERMANN, W., "Elementos de Lógica teórica", Editorial Tecnos, Madrid, (1962).
- [20]. LANDAU, E., "Grundlagen der Analysis", Chelsea, New York, (1965). Primera edición de 1930.
- [21]. MOORE, G.H., "Zermelo's Axiom of Choice: Its origins, development and

- influence", Springer, Berlín, (1982).
- [22]. NELSON, E., "Predicative Arithmetic", Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, (1986).
- [23]. PASCH, M., "Vorlesungen über Neuere Geometrie", Teubner, Leipzig, (1882). Hay traducción española de Rey Pastor y A. Ude, 'Lecciones de Geometría moderna', Junta de Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas, Madrid, (1913).
- [24]. PLATON, "La República o el Estado", Espasa-Calpe, Madrid, (1983).
- [25]. POINCARÉ, H., "Les mathematiques et la logique", Rev. met. et mor. 14 (1906) 294-317. Incluido en Heinzmann p. 79-104.
- [26]. SKOLEM, T., "Eine Bemerkungen zur Axiomatischen Begründung der Mengenlehre", Vorträge gehalten auf dem 5 Kongress der skandinav. Mathematiker in Helsingfors (1922) 217-232. Traducción inglesa en van Heijenoort p. 290-301.
- [27]. TORRETTI, R., "Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré", D. Reidel, Dordrecht, Holland, (1978).
- [28]. WAGON, S., "¿Where are the zeros of zeta of s?", Math. Intell. 8 (1986) 57-62.
- [29]. ZERMELO, E., "Beweis dass jede Menge wohlgeordnet werden kann", Math. Ann. 59 (1904) 514-516.
- [30]. ZERMELO, E., "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, "Math. Ann. 65 (1908) 261-281. Traducción inglesa en van Heijenoort p. 199-215.
- [31]. ZERMELO, E., "Sur les ensembles finies et le principe de l'induction complète", Acta Math. 32 (1909) 185-193. Incluido en Heinzmann p. 148-156.

---

**DISCURSO PRONUNCIADO POR EL  
ILMO. SR. D. ANTONIO DE CASTRO BRZEZICKI**

*Académico Numerario de la Academia en  
contestación al leído por el*

**ILMO. SR. D. JUAN ARIAS DE REYNA MARTINEZ**  
*en el acto de su recepción como Académico  
Numerario celebrado el 1 de diciembre de 1988.*

Excmas. e Ilmas. Autoridades, Muy Ilustres Académicos, Señoras y Señores:

Ha sido para mí un honroso y agradable encargo el de contestar el discurso de ingreso en esta Academia Sevillana de Ciencias del Prof. Juan Arias de Reyna Martínez por su triple condición de antiguo alumno, compañero y amigo. Desde la creación de nuestra Academia he creído que debería ser él el primer académico elegido por la Sección de Matemáticas dados los méritos que en él concurren; creo que la referencia que sigue justificará mi creencia.

Los estudios de la Licenciatura de Matemáticas se iniciaron en nuestra Universidad el curso 1966-67. Entre los alumnos de la primera promoción sobresalió Arias de Reyna desde el momento en que se incorporó a la misma. Sus agudas observaciones y comentarios, su deseo de profundizar en los temas desarrollados en clases y Seminarios y sus intervenciones en estos, evidenciaron sus extraordinarias cualidades. Licenciado en 1971, presentó ese mismo año su tesina de Licenciatura obteniendo la calificación máxima y el Premio extraordinario. A continuación y en el tiempo mínimo legal, leyó su tesis doctoral (1973) obteniendo también la calificación máxima y el Premio extraordinario del Doctorado.

Su labor docente comenzó en nuestra Facultad como contratado a nivel de adjunto (1971-73) y, a continuación, como Adjunto interino (1973-75). En este año 1975 ganó, en difícil oposición, la plaza de Agregado numerario de la Universidad Autónoma de Madrid, regresando, por concurso, a Sevilla el año siguiente. En 1981 ascendió a catedrático en competido concurso de acceso. En nuestra Universidad ha tenido a su cargo las asignaturas Análisis matemático IV y V, especialmente la última que culmina los estudios de Análisis de la licenciatura de Matemáticas. Tienen prestigio sus cursos monográficos de Doctorado; sabe exponer con sencillez conceptos y métodos de alto grado de abstracción, mostrando con claridad su esencia y su significación y preparando a los alumnos para la investigación.

Para aclarar la significación de su labor investigadora recuerdo, ante todo, que los métodos más usuales en la investigación matemática son, en grandes rasgos, los siguientes: el de generalización, el de similitud (con otras teorías relacionadas) y, claro está, el más ambicioso de creación de nuevas teorías “ab ovo”; este último se considera incluso característico por la libertad que existe en Matemáticas de fijar una Axiomática (\*). En estos métodos se tiene una base de partida, una de llegada o una idea del camino a seguir, lo que simplifica, en mayor o menor grado, la tarea del investigador.

Suele ser, en cambio, más difícil el plantearse problemas nuevos o cuestiones interesantes “per se”, sin visible conexión con otras conocidas y en las que, además, aparecen con frecuencia limitaciones bien determinadas. Este tipo de limitaciones es también característico de la Matemática aplicada en la que se presentan modelos matemáticos con parámetros limitados “a priori”. Las cuestiones de esta clase suelen dar origen a métodos e, incluso, a teorías esencialmente nuevas; como proceso de investigación es el menos frecuente pero, en mi opinión, el más meritorio. Es también el que prefiere Arias de Reyna; en sus variadas lecturas va asimilando, con prodigiosa facilidad, las teorías matemáticas más variadas y sabe encontrar en ellas: temas de investigación nuevos o con prolongaciones o aplicaciones interesantes, cuestiones importantes pendientes de aclaración o complementación, conjeturas concretas enunciadas por otros matemáticos u originales suyas, posibles conexiones entre problemas de campos diversos. Hallazgos de todos estos tipos han sido punto de partida de investigaciones suyas o de sus discípulos y han originado publicaciones en revistas de todo el mundo.

Se comprende que, para abordar problemas tan diferentes, se precisa una muy amplia cultura matemática; pero también una especial modestia y una ilusión por trabajar sin preocuparse excesivamente de aumentar el peso de la obra publicada. Porque el método es doblemente ingrato; debido, por una parte, a que, para acometer cada problema se requiere una preparación distinta y, por otra, a que por tratarse de cuestiones concretas, las publicaciones en las que se dan a conocer suelen ser de corta extensión. Por ejemplo, en un artículo suyo (nº 7) demuestra, por vez primera, una célebre conjetura, ya implícita en obras de Banach hace más de cincuenta años, y enunciada explícitamente por Klee y Wilansky en 1966; y lo hace en menos de cuatro páginas (eso sí, en una de las revistas de mayor prestigio mundial). Arias de Reyna también ha elaborado generalizaciones originales; pero las caracteriza siempre una ponderación extremada y se limita a considerar las que son significativas o útiles. De sus métodos de investigación sigue una sorprendente variedad temática en sus publicaciones, en las tesinas y tesis doctorales dirigidas, así como en la labor de seminario que desarrolla en nuestro Departamento de Análisis Matemático.

---

(\*) Las nuevas teorías creadas arbitrariamente carecen, en general, de interés o utilidad y terminan en el olvido. Hay incluso quienes las consideran un peligro para la Matemática. Es como inventarse las reglas de un juego nuevo y organizar así partidas; no es, quizás, casual que fuera un matemático moderno E.G. Kogbeliantz el que inventara el juego de ajedrez tridimensional.

También estas últimas han dado origen a publicaciones en revistas nacionales o extranjeras. Ha dirigido cinco tesis doctorales y once tesinas de Licenciatura y ha colaborado activamente en otras varias. De los cinco doctores que ha apadrinado hay un catedrático de Universidad y cuatro profesores titulares.

Creo que este breve resumen de la obra docente e investigadora del nuevo académico permite calibrar su categoría científica.

Paso a contestar su discurso de ingreso, añadiendo, aunque sea pisando sobre ascuas, algunas reflexiones sobre el problema de la Axiomática que es fundamental en Matemáticas y, además, difícil y delicado. Es fundamental porque la Matemática, aunque íntimamente relacionada con nuestro mundo real, es una ciencia lógico-deductiva que aspira a una verdad universal; por ello debe tener la base firmemente asentada y su “modus operandi” cuidadosamente elegido para evitar toda posterior invocación a la intuición o a la evidencia. Es difícil porque lo es la concepción de dichos entes básicos y la definición de las relaciones iniciales entre ellos, en especial cuando estas o sus consecuencias son discutibles; Arias de Reyna ha mencionado algunas de las controversias que ha originado su aceptación. Es delicado porque, además de las condiciones exigidas a toda Axiomática, se requiere que sus consecuencias se adapten a los modelos, diversos e incluso variables, que se presentan en la Matemática aplicada. Todo ello ha motivado una larga evolución del proceso de axiomatización de la Matemática que es analizada por Arias de Reyna de un modo preciso y, además ameno, lo que resulta más difícil. Insiste en particular en las dos etapas cruciales: la primera, limitada a la Geometría en la Grecia clásica, y la segunda que afectó ya a toda la Matemática y que se desarrolló desde 1880 hasta principios de siglo. Acompaña su exposición con observaciones originales, comentando la génesis, desarrollo y problemas que plantea el proceso y examinando las diversas soluciones adoptadas. La consecuencia final (que luego matizaremos) es que, en el momento actual, no existe: por un lado, una estructura formal de la Matemática que sea completa (esto es, permita demostrar la verdad o la falsedad de todas sus proposiciones): por otro, una estructura lógico-deductiva que represente el mundo real.

Pero esto no quiere decir que el edificio de la Matemática no sea sólido o que no deba aplicarse a los fenómenos naturales. La obra construida está, en general, bien hecha y permanecerá vigente; el que cambien algunos de sus pilares o se añadan otros nuevos se debe solo a crisis de desarrollo, bien procedentes de la propia Matemática, bien por requerimiento de las otras ciencias que la aplican. El ejemplo más clamoroso fue la introducción de las geometrías no-euclídeas, hoy básicas en la Física relativista; tuvo mucha resonancia debido a que la Geometría euclídea se había considerado durante dos mil años como el capítulo más firmemente asentado de la Matemática. Baste recordar que Kant, el filósofo más profundo que ha existido, hace del espacio euclídeo “una intuición pura a priori”; y que el mismo Gauss el “princeps mathematicorum” no se atrevió a publicar unas contribuciones suyas sobre las geometrías no euclídeas por miedo a “la gritería de los beocios”. Y Lobatchevski que sí se atrevió, perdió su cátedra por ello.

Las mencionadas crisis sucesivas de la Matemática han dado origen a tomas de posiciones extremas que Arias de Reyna analiza: desde el construirla como una ciencia empírica, hasta separarla radicalmente de la realidad y considerarla como un capítulo de la Lógica (construcción iniciada por Frege y continuada por Russell y Whitehead). También detalla la solución más aceptada hoy que consiste en el desarrollo del programa de Hilbert a partir de la axiomática de Zermelo-Fraenkel. Hilbert compara la construcción de la Matemática al desarrollo de una partida de juego (por ej. el ajedrez; los conceptos básicos equivalen a las piezas del juego y las reglas lógicas a las reglas del mismo.) Así no pueden aparecer, por lo menos al principio, ni contradicciones ni problemas concretos indecidibles. En cambio, al introducir el axioma del infinito (el primer concepto que no tiene interpretación física ni puramente lógica) se presenta la indecidibilidad; por ello ha sido tan criticada su introducción por empiristas y filósofos. Los matemáticos, en cambio, lo aceptan unánimamente porque es: imprescindible (ya Hilbert afirmaba que el Análisis Matemático es, en cierto modo, una única sinfonía del infinito), y, además, es lícito; ya que, en Matemáticas, el criterio de verdad es el de consistencia interna más que el de admisibilidad sensitiva o intuitiva. Arias de Reyna detalla el papel que juegan la teoría de conjuntos como base y este y otros axiomas en la construcción formalista de la Matemática así como el límite que le fijó Gödel. Llegados a este punto, parece que el análisis de la fundamentación de la Matemática iba a terminar con un diagnóstico pesimista sobre la misma. A veces se culpa de estas dificultades a lo que parece excesiva suspicacia de los matemáticos y a su afán de hilar demasiado delgado. También en el discurso que comentamos se justifican, con ejemplos, la postura de los matemáticos y la elección que han hecho de los axiomas.

Queda, por último, la, en apariencia, frustrante cuestión de la existencia de cuestiones indecidibles que sigue del famoso teorema de Gödel. Este resultado lleva a la escuela falibilista a tomar posiciones básicas diferentes; los falibilistas opinan que la Matemática está más dedicada a buscar la verdad que a encontrarla. Para ellos esta Ciencia consiste en el descubrimiento de estados sucesivos en las estructuras formales subyacentes a nuestro Universo que sean aplicables a él o muestren sus aspectos esenciales. Con otras palabras: Matemáticas es lo que han ido haciendo los matemáticos del pasado y están haciendo los del presente, sin desechar nada; como se ve es un punto de vista casi-empírico. Arias de Reyna es, en cambio, partidario de continuar investigando desde el punto de vista lógico; es decir, buscando otros conjuntos de partida o nuevas intuiciones que permitan renovar la Axiomática para lograr una construcción definitiva de la Matemática. ¿Será ello posible?.

**SEÑORAS Y SEÑORES:** Hoy inicia la joven Academia Sevillana de Ciencias su segunda etapa al incorporar a la misma al primer académico electo. En nombre de nuestra Academia doy la bienvenida al Profesor Arias de Reyna Martínez que estoy convencido de que contribuirá eficazmente a su desarrollo científico.

---

**DISCURSO PRONUNCIADO POR EL  
EXCMO. SR. D. FRANCISCO GONZALEZ GARCIA**

*Presidente de la Academia Sevillana de Ciencias  
en el acto de recepción como Académico*

*Numerario del  
ILMO. SR. D. JUAN ARIAS REYNA MARTINEZ*

Excmo. Sr. Consejero de Educación y Ciencia, Excmos. Srs. Vicerrectores e Ilmos. Srs. Decanos y Directores de Facultades, Escuelas Técnicas y Colegio Oficiales, Ilustrísimos. Srs. Académicos, Señoras y Señores:

Hoy es un día de especial significación para la Academia Sevillana de Ciencias. Creada la Corporación y establecidos los Estatutos que la rigen por Decreto (102/1.985) de la Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía, BOJA nº 62 de 15 de Junio, se nombraron sus doce primeros Académicos Numerarios por Orden de 30 de Diciembre del mismo año, de dicha Consejería, y se les dio posesión de sus cargos el 26 de Mayo de 1986 en presencia de las altas Autoridades del Gobierno de nuestra Comunidad Autónoma.

La Academia así constituida configuró sus órganos de Gobierno en Julio de 1.986 iniciando de este modo su vida Corporativa y, con ella, el cumplimiento de las misiones que le señalan sus estatutos y el desarrollo de las actividades correspondientes y necesarias para este fin.

Desde el momento de su constitución, la Junta General y la Junta de Gobierno de la Academia iniciaron las acciones necesarias para la ampliación del número de sus miembros a fin de completar tan pronto como fuera posible las distintas especialidades incluidas en el marco de las cuatro Secciones, Química, Física, Biología y Matemáticas, creadas por los propios estatutos.

A este respecto, la Academia ha elegido hasta esta fecha, además de un Académico de Honor (el Profesor Don Ramón Margalef López) seis Académicos Numerarios distribuidos en las cuatro Secciones mencionadas.

El acto que celebramos con esta sesión solemne es justamente el de toma de posesión del primero de los seis Académicos hasta ahora elegidos que ocupará a partir del día de hoy su plaza de Numerario de esta Corporación.

Con este acto se inicia por lo tanto lo que va a ser en este primer período de su historia, una de las actividades más frecuentes en la etapa de la construcción y

configuración de esta Academia de Ciencias.

Me cabe la satisfacción de anunciar a este respecto que otros cuatro de los Académicos hasta ahora elegidos han entregado ya a esta Presidencia sus discursos de ingreso que siguen ahora los trámites reglamentarios para culminar pronto en solemnidades semejantes.

Por la especial significación de este acto, deseo expresar al Excmo. Sr. Consejero de Educación y Ciencia el reconocimiento de la Academia por haberse dignado presidirlo, al que quiero sumar asimismo nuestro agradecimiento por sus continuadas atenciones y por la ayuda prestada para su puesta en marcha y para poder llevar a cabo las primeras actividades científicas de la Corporación.

Expreso también el reconocimiento de la Academia a los Excmo. Srs. Presidentes y Académicos representantes de las Academias hermanas, así como a los Excmos. Srs. Vicerrectores e Ilmos. Sres. Decanos que nos honran con su presencia y a todas las personas que asisten al acto.

Está en los propósitos de la Academia el mantenimiento de una estrecha relación científica con las Facultades, Departamentos Universitarios y Organismos de investigación en los que se crea e imparte la Ciencia cuyo estudio, investigación, difusión y progreso son asimismo fines de la propia Academia. Para simbolizar este interés se ha organizado la celebración de este acto en la Facultad de Matemáticas a la que pertenecen el Académico al que se acaba de dar posesión y otros Numerarios de la Academia. Quiero expresar nuestro reconocimiento al Ilmo. Sr. Decano de esta Facultad por las facilidades y excelente acogida que ha dispensado a esta celebración.

Otras actividades de la Academia centradas en su misión de fomento y difusión de la Ciencia, se han desarrollado también en el marco de estas relaciones Academia-Universidad-Organismos de investigación, como ocurrió en el Ciclo de Conferencias sobre Ecología, impartido en 1987 por Académicos, Profesores universitarios e Investigadores, con ocasión del cual se dio posesión de la primera plaza de Académico de Honor de la Corporación al eminente Profesor Don Ramón Margalef López; o en el Curso Avanzado sobre “Biología Molecular de Hongos Filamentosos” que con participación asimismo de Académicos, y de Profesores de la Facultad de Biología de la Universidad Hispalense y de otras Universidades nacionales y extranjeras, se impartió también en 1.987 a un numeroso grupo de científicos jóvenes de toda España; o en la reunión de Matemáticos, organizada asimismo por la Academia y celebrada como las anteriores, gracias a la ayuda otorgada por la Consejería de Educación y Ciencia, que para discutir problemas de la investigación sobre el tema “Holomorfía en dimensión infinita” tuvo lugar en esta Facultad de Matemáticas, con participación de científicos y Profesores de esta y otras universidades, etc.

Estima la Academia que el cumplimiento de sus fines implica la conexión de sus actividad con la realidad científica, técnica, cultural, social y económica de su entorno, acercándose a los problemas de la sociedad moderna tan estrechamente

ligados en la actualidad al desarrollo de la ciencia y de la técnica. Y a estos fines se encaminaron o se dirigen otras de las actividades que ha desarrollado o que se encuentran en su perspectiva inmediata y que se extiende desde la difusión de información científica al cuerpo social hasta la colaboración con las Autoridades y Organismos, Nacionales, Autonómicos, Provinciales y Locales y a los contactos con las empresas ocupadas a diario en los múltiples y variados problemas de la aplicación de la ciencia y la tecnología al progreso de la humanidad.

Como otros Organismos Científicos y Culturales, han tenido y tienen que superar las Academias considerables dificultades para el cumplimiento de su misión, derivadas en su mayor parte de la crónica escasez de medios en que se desenvuelven; y no es una excepción en cuanto a estas dificultades la Academia Sevillana de Ciencias que añade a las carencias o escaseces habituales las que se derivan del hecho de su reciente creación, tales como la ausencia casi absoluta de infraestructura y hasta de una sede propia para su funcionamiento científico y administrativo, suplida ésta entre tanto por la atención y benevolencia de los Decanos de las Facultades de Ciencias, a quienes reitero nuestro agradecimiento.

Es de justicia sin embargo proclamar en este acto y en esta ocasión el interés demostrado por la Consejería de Educación y Ciencia, en mejorar las condiciones de trabajo y los medios de las Academias con la mejora actual de la consignación ordinaria de las mismas y con la publicación en los dos últimos años de sendas Convocatorias de Ayudas para actividades científicas a realizar por las radicadas en la Comunidad Autónoma andaluza, que han permitido la realización de estudios, trabajos, cursos, ciclos de conferencias, etc., que han contribuido y contribuirán al enriquecimiento científico y cultural de nuestra región; interés demostrado asimismo con la creación del Instituto de Academias de Andalucía como órgano de relación interacadémica y de participación de las Academias en Organismos superiores de asesoramiento científico y cultural y en cuya adecuada estructuración y eficaz funcionamiento ponen aquellas las mejores esperanzas.

Quedan muchas necesidades por cubrir para asegurar el funcionamiento digno de las Academias y más todavía para estimularlas y configurarlas como órganos vivos de ejercicio del pensamiento científico y del fomento y la difusión de la Ciencia y de la Cultura.

Le consta a la Academia Sevillana de Ciencias, como seguramente a las restantes Academias y a la comunidad científica andaluza el interés de la Consejería de Educación y Ciencia en el desarrollo científico y técnico de nuestra región, en la mejora del nivel cultural de nuestro pueblo y de las dotaciones universitarias y de investigación, materializada principalmente en el Plan cuatrienal de Inversiones educativas que incluyen entre otras muchas atenciones importantes la creación y construcción de una Biblioteca Científica de Andalucía, dotada de los medios y recursos bibliográficos, humanos, informáticos, etc., que corresponden a las exigencias de nuestro tiempo, concepción en la que esta Academia se ha honrado en colaborar.

Excmo. Sr. Consejero de Educación y Ciencia: la Academia Sevillana de Ciencias que agradece las ayudas y atenciones recibidas hasta ahora para iniciar su puesta en marcha y el desarrollo de sus actividades, espera y desea fervientemente que la construcción de la sede que con tanta urgencia necesita tenga cabida en estos Proyectos y quiere al mismo tiempo transmitirle la esperanza, que coincide seguramente con la de todas las Academias, de ver continuada la política de mejora de sus presupuestos e infraestructura y consolidada y aumentada la ayuda económica para actividades, de modo que puedan llegar a cumplir sus misiones con la eficacia y la brillantez que desean y que nuestra comunidad merece.

No quiero terminar estas breves palabras sin manifestar la satisfacción de la Academia por ver en el día de hoy incorporado a su plantilla de Numerarios al Ilmo. Sr. Don Juan Arias de Reyna Martínez, Profesor destacado y sobre todo investigador y científico de acreditado prestigio. Estoy seguro, como lo están los restantes compañeros de la Academia, de que va a prestar al mejor cumplimiento de los fines de la misma una eficaz y brillante contribución.

La perfecta concepción y estructura de su discurso de ingreso y los méritos científicos que en él concurren son la mejor garantía del acierto en su elección y de las esperanzas que la Academia pone en su participación en los trabajos y actividades de la Corporación.

*Muchas gracias*

---

## LA QUIMICA ANALITICA AYER Y HOY

*Discurso pronunciado por el ILMO. SR.*

*D. JAIME GRACIAN TOUS*

*Académico Numerario de la Academia  
en el acto de su recepción como Académico  
Numerario, celebrado el 31 de Mayo de 1989.*

•

Excmo Sr. Viceconsejero de Educación y Ciencia, Excmo. Sr. Vicerrector de la Universidad, Excmas. e Ilmas. Autoridades y Representaciones, Excmo. Sr. Presidente de la Academia, Ilmos. Sres. Académicos, Señoras y Señores:

Antes de comenzar a exponer el tema de mi disertación, quiero dar públicamente las gracias a los Miembros de esta Academia por el honor que me hacen al admitirme como Académico de número, siendo consciente de mis escasos méritos y mis limitaciones, y que sólo puede estar justificado como premio a una vida profesional limpia y entusiasta, tanto en el terreno de la docencia, como en la actividad investigadora en el campo del análisis y en el ejercicio profesional. La amistad y el compañerismo de todos los ilustres miembros de esta Academia, han sido los únicos motivos que han dado lugar a que yo esté aquí; amistad y compañerismo que, para algunos, se ha forjado a lo largo de muchos años de convivencia, luchando en el mismo campo, compartiendo alegrías y malos ratos, en este discurrir de la vida en que se forjan las verdaderas y entrañables amistades.

Al tratar de elegir un tema que me sirviera de base para la que iba a constituir mi primera Comunicación a esta Academia, y que debería ser expuesto en una sesión pública, pensé, en primer lugar, que no debería circunscribirme a un tema específico y concreto de mi especialidad, cuya exposición y desarrollo tendría interés para un número muy reducido de especialistas, resultando tedioso y sin interés para la mayoría de los asistentes. Por este motivo, debía elegir un tema amplio, que pudiese ofrecer interés para la mayoría de los asistentes, tocando problemas y puntos de discusión actuales. Desde mis primeros estudios, nunca me he sentido atraído hacia las materias abstractas; y los principios teóricos me han ocupado gustosamente como orientación de los procedimientos y métodos de trabajo que han de conducir a la resolución de problemas de índole

práctica, relacionados con la salud, el bienestar, la industria, el comercio, etc.

En este orden de ideas, me decidí por intentar hacer una exposición de lo que ha sido la Química Analítica a lo largo de su historia, desde sus comienzos a finales del siglo XVIII, hasta nuestros días, con el fin de poner en evidencia las vicisitudes que ha pasado en estos dos siglos de desarrollo ininterrumpidos; su incidencia en el desarrollo de otras ciencias como la Medicina y la Bioquímica; y en la industria. Al mismo tiempo hacer un intento de trazar el perfil del analista en el siglo XVIII y parte del XIX, que podemos considerarlo como el período de la Química Analítica clásica, contrastándolo con el del especialista en Química Analítica de la época actual, que pueda responder eficazmente a lo que representa en la Ciencia Química y lo que pide la sociedad de nuestra época.

Debo hacer, no obstante, una aclaración que matice adecuadamente la intención que acabo de exponer y es que no trato de hacer un resumen de la Historia de la Química Analítica; mi pretensión se reduce a destacar ante ustedes, lo más claramente posible, las variaciones que ha experimentado el concepto y la metodología analítica a lo largo de los dos siglos de su historia; y como se ha ido creando la que se considera hoy como una subdisciplina dentro del amplísimo campo de la Química. Es lógico que, para poner esto en evidencia, tendré que referirme a hechos o situaciones históricas, pero sin que las citas de personajes y descubrimientos tengan necesariamente el rigor histórico que deberían tener si mi pretensión tuviera sólo la finalidad de hacer historia. Es a todo esto a lo que alude el título de mi trabajo "La Química Analítica ayer y hoy".

## ***1. PRINCIPIOS DE LA QUIMICA ANALITICA: DESARROLLO DE LA EPOCA CLASICA.***

El desarrollo de la Química Analítica va unido indiscutiblemente a la historia de la química como ciencia, en la que el análisis, complementado con la síntesis, constituían las operaciones fundamentales que irían dando a conocer las leyes que rigen los fenómenos químicos del universo. Las manipulaciones de índole química, realizadas por los hombres con finalidades distintas, bien la de obtener riquezas mediante la preparación de oro a partir de otros metales más abundantes, de preparados con fines medicinales, o también de productos con fines industriales, constituyó la actividad de muchos desde los siglos más remotos, encontrándose referencias de estas actividades desde el siglo II a. de J.C.. En el siglo XII, aparecen ya en Europa las referencias a la Alquimia, en traducciones hechas en España de obras árabes (1). Durante todos estos siglos, se había acumulado una información notable sobre los productos y las operaciones más diversas, aunque todo esto formaba un caos difícilmente ordenable, obtenido mediante una experimentación realizada e interpretada de una forma poco inteligible, por el uso que se hacía del lenguaje y la utilización de términos y signos que empleaban los alquimistas.

Es a principios del siglo XVI cuando se empieza a experimentar de una forma

más sistemática, aislando productos y estudiando sus propiedades; es el comienzo de la química experimental. Comienzan a realizarse importantes aportaciones a la Química, aunque en las filas de los que aportaron mayores conocimientos a la química de la época figuran, quizás, más médicos y farmacéuticos que químicos puros. En esta época destacan Johann Baptista van Helmont, nacido en Bruselas (1577 - 1644), que estudió medicina en Lovaina dedicándose después por entero al estudio de la Química; y Robert Boyle, irlandés (1627 - 1691), que siguió los pasos de van Helmont, dedicándose fundamentalmente al estudio de los gases, enunciando la ley de compresibilidad que todavía hoy se incluye en nuestros libros de texto con el nombre de Boyle - Mariotte. A Boyle, se le considera por muchos historiadores como el más destacado fundador de la Química moderna, principalmente, por haber sido el primero que consideró a la Química con méritos y motivos suficientes para constituir una disciplina que fuese estudiada por sí misma y no como era considerada entonces, subordinándola a una auxiliar de la medicina, o un conjunto de datos prácticos con un esquema parecido al de los antiguos alquimistas.

Pero, en la primera mitad del siglo XVIII la Química no podía ser considerada, todavía, como una ciencia; la mayoría de las experiencias correctamente realizadas, daban lugar a unos resultados que no podían ser interpretados, al carecer de una base teórica que los relacionara y los explicara razonablemente. Muchos seguían utilizando todavía los signos de los alquimistas de siglos anteriores, por lo que los escritores de la época resultan, en muchos casos, confusos y difícilmente inteligibles.

Esta situación se vino a enturbiar más todavía con la introducción de la denominada teoría del "flogisto", basada en unas ideas dadas a conocer por el químico alemán Johann Joaquin Becher, en un libro que escribió en el año 1669 con el título de "Physicoe subterraneoe", (2) admitiendo que la materia se compone de cinco elementos: aire, agua y tres tierras, una de ellas inflamable. El tratado de Becher fue reimpreso en 1703 por Stahl, acompañando un extenso comentario, perfeccionando su presentación y proponiendo fórmulas que trataban de representar las reacciones químicas observadas en muchos casos. Stahl, alemán nacido en Aspach, estudió y ejerció la medicina, siendo además profesor de Química en Jena y más tarde en la Universidad de Halle y, desde su posición de profesor, difundió y popularizó con la denominación de "teoría del flogisto" las ideas originarias de Belcher.

Desgraciadamente, la "teoría del flogisto" continuó siendo aceptada durante casi un siglo, sirviendo para oscurecer la mente de los experimentadores de aquella época, algunos de los cuales hicieron importantes aportaciones a la metodología analítica. Entre estos, quiero destacar al sueco Tobern Bergman, reconocido generalmente como el fundador del análisis inorgánico cualitativo, siendo el primero en presentar en su libro, publicado en 1779(3), un esquema para la separación sistemática de cationes utilizando el sulfuro de hidrógeno; y describiendo reacciones de precipitación y patrones de color. Este esquema, con

muchas modificaciones y adiciones, es el que ha llegado hasta nuestros días, como trabajo práctico fundamental en nuestros cursos de análisis cualitativo. Todas estas reacciones y sistemas de trabajo se establecían de una forma empírica, pues Bergman, como todos los químicos de su época, era un ardiente defensor de la “teoría del flogisto”.

Fue el genio de Lavoisier (1743 - 1794) el que pudo derribar los últimos reductos del “flogisto”, mediante la aplicación de medidas analíticas cuantitativas precisas que interpretadas correctamente, sin los prejuicios de épocas anteriores, le condujo al establecimiento de la primera ley de la química denominada “de la conservación de la masa”, completada por Proust (1799) como conclusión de sus investigaciones sobre el cobre, con la “ley de las proporciones definidas”, y por Richter (1795) con la “ley de las proporciones recíprocas o ley de los equivalentes”. Como culminación de todos estos trabajos se da a conocer la teoría atómica, enunciada por Dalton (1802 - 1803). John Dalton (1766 - 1844), que vivió en Manchester, era un hombre modesto, que se ganaba la vida como profesor particular, siendo su teoría el fruto del estudio de todas las publicaciones e ideas anteriores.

Como resumen de todas estas nuevas teorías que constituyeron la base de la química, puede citarse la obra de Lavoisier publicada en 1789 en París, con el título “*Traité Élémentaire de Chimie*”, unido a una nomenclatura química dada a conocer como “*Méthode de Nomenclature Chimique*” (1787) (4).

### ***Análisis Gravimétrico y Volumétrico.***

Los trabajos de Lavoisier y seguidores, establecieron la metodología adecuada para la realización del análisis gravimétrico.

En la utilización del análisis volumétrico, existen ya antecedentes de la segunda mitad del siglo XVIII de haberse empleado por Home en 1757 (5) para valorar el calcio del agua, utilizando una disolución de carbonato potásico y cloruros con nitrato de plata, fijando el punto final al cesar de formarse precipitado en la disolución clara. Pero, generalmente, se atribuye a Descroizilles (4) el establecimiento de un procedimiento volumétrico, diseñando un cilindro graduado para la medida del volumen consumido de la disolución de índigo, colorante natural muy utilizado en aquella época en la industria textil. En otro trabajo(3), describe una serie de alcalimetrías y acidimetrías, empleando como indicador jarabe de violetas. Veinte años más tarde Gay-Lussac, perfecciona notablemente los instrumentos de medida, adoptando diseños que se utilizan aún en nuestros días y que permiten realizar medidas de relativa precisión (4).

El disponer de estos medios y la simplificación que suponía en las operaciones cuantitativas, da lugar a que se aplicaran estos procedimientos en numerosos tipos de reacciones, como, por ejemplo, la argentometría por Gay-Lussac, ampliada por Levol a la determinación de sales halógenas, con el cromato potásico como indicador(4); la manganometría, por Margueritte (1846); la

iodometría, por du Pasquier(1840); las iodometrías indirectas, haciendo uso del tiosulfato sódico, reacción descubierta por M.J.Fordos y A. Gelis (1842); la arsenometría, por el mismo Gay- Lussac(1835). Pero, es indudable que a la difusión de todos estos métodos contribuyó poderosamente la obra de Friedrich Mohr, publicada en 1855 (6). En las valoraciones de ácidos y bases, se empleaba, tan solo, el tornasol, y no fué hasta 1877 que Lück introdujo la fenoltaleína para la valoración de los ácidos débiles con bases fuertes y, en el mismo año, Lunge recomienda el naranja de metilo para la valoración de ácidos fuertes con bases débiles.

Por lo que respecta al análisis orgánico elemental, Justus Liebig en 1837 había dado a conocer su aparato de combustión para efectuar las determinaciones de carbono e hidrógeno. En 1831, Dumas había ya descrito su dispositivo para la determinación de nitrógeno; y cincuenta años más tarde, Kjeldahl, describió su método, que ha venido siendo utilizado hasta nuestros días. Los halógenos y el azufre eran determinados por el método de Carius.

### ***Métodos Físicos de Análisis.***

Las determinaciones analíticas mediante la utilización de constantes físicas fueron realizadas desde los primeros tiempos de la Química. Determinaciones de peso específico fueron realizadas por Baumé, contemporáneo de Lavoisier, en la segunda mitad del siglo XVIII, utilizando un areómetro graduado construido por él que fue estudiado más detenidamente por Hassenfratz, desarrollando un método gráfico para determinar la concentración de soluciones salinas (4). Este mismo aparato fue aplicado por Gay-Lussac, veinticinco años después (1824) para la determinación del contenido alcohólico de las disoluciones hidro-alcohólicas, con lo que se denomina alcohómetro centesimal, en uso en la actualidad.

Otras de las medidas físicas que cuentan con más antigüedad en el análisis, son la colorimetría y la espectroscopía. La colorimetría, era ya utilizada en el siglo XVIII en su forma más elemental, simplemente valiéndose de una escala de comparación, perfeccionándose estos procedimientos en la segunda mitad del siglo XIX al introducirse el colorímetro Dubosq (1870) (7). La utilización de las coloraciones a la llama como criterio de identificación, fué conocido y utilizado desde los tiempos más antiguos, pero no llegó a constituir un método de uso generalizado en el análisis inorgánico hasta que aparecieron las publicaciones clásicas de Kirchhof y Bunsen en 1860.

No puedo dejar de mencionar, también, la utilización de la espectrofotometría, cuya aplicación a las disoluciones de productos coloreados tuvo una gran importancia a finales del siglo pasado, habiendo sido desarrollados sus principios teóricos por Lambert y Beer, separadamente, en la ley conocida como ley de Lambert-Beer. Una de sus aplicaciones más destacadas fué la realizada por Preyer en 1873 para la determinación de la oxihemoglobina en la sangre(8).

La polarimetría, también fue utilizada, aplicada a la determinación de

glucosa, albúmina, alcaloides, etc (8).

### ***Concepto de la Química Analítica y del Analista durante el Siglo XIX y principios del XX.***

En lo que antecede, he intentado trazar unas pinceladas que dieran una idea muy general de la situación de la química analítica al final del período al que nos referimos y que puede considerarse de desarrollo de la química analítica clásica. Es muy difícil entender la mentalidad del químico de la época, pues para ello tendríamos que desprendernos de todos los principios teóricos que ha ido aportando la química - física a lo largo del siglo, y que han ido conformando la base de nuestra Química analítica actual.

En primer lugar, desde Lavoisier y durante todo el siglo XIX, el análisis constituía un método de trabajo en la Química, en cuyo desarrollo habían contribuido, como ya apuntábamos con anterioridad, no sólo químicos, sino experimentadores interesados en otros campos, para los que la Química y el análisis constituían tan sólo un medio. El análisis gravimétrico, practicado de una forma sistemática y rigurosa, es el que sirvió de base para el establecimiento de las leyes fundamentales de la Química, por lo que se atribuye a Lavoisier la frase "la Química es la ciencia del análisis"(9), lo cual parece indicar que se distaba mucho de entrever la creación de una rama de la Química que se ocupara del estudio concreto de los problemas analíticos. Pero esto es lógico; e igual ocurría para las que más adelante constituyeron ramas derivadas dentro de la ciencia Química, como son la Orgánica, la Inorgánica, Química - Física, etc..

La Química en este período era eminentemente experimental; y las leyes y fundamentos teóricos que se habían enunciado, a la luz de nuestros conocimientos modernos, resultan algo vagos e imprecisos. Como bien dice Le Chatelier en su obra magistral "De la Méthode dans les Sciences experimentales"(10) una noción abstracta, es decir, una ley, no es dada nunca por la experimentación directa; en su primera enunciación, constituye sólo una base o plataforma de trabajo, que ha de ser completada y perfeccionada por los esfuerzos acumulados de experimentadores y pensadores que han de darle su forma o expresión definitiva. Encauzada la investigación por un camino científico, es decir racional y metódico, se desarrolló un trabajo ingente, acumulando una enorme información, de la que dan fé los libros aparecidos a partir de mediados del siglo XIX. La obra más importante de esta época es la de Carl Remigius Fresenius (1818 - 1897),(11) (12) que publicó un tomo de Análisis Cualitativo, y otros dos tomos, dedicado el primero a "Análisis químico cuantitativo general" y, el segundo, a "Análisis aplicado". Fresenius, fue también el fundador de la famosa revista "Zeitschrift für Analytischen Chemie", que hizo su primera aparición en 1862, continuando todavía su publicación. La revista The Analyst, órgano de la Society of Public Analyst a la que me referiré más adelante, fué fundada en Inglaterra catorce años después, en 1876. Otro libro muy importante, que constituye un manual de análisis volumétrico cuya primera edición

apareció en Inglaterra en el año 1863 y, en su versión francesa, en París en 1885, es la obra de Sutton(13); de este libro se han ido haciendo ediciones sucesivas revisadas, habiendo aparecido la duodécima en 1935.

La obra de Koepplin(14), aparecida en su traducción española del francés en 1943, comparada con las obras anteriormente mencionadas, pone en evidencia las grandes aportaciones realizadas a la Química en los veinte años transcurridos hasta la aparición de los grandes tratados de análisis.

Toda esta acumulación de métodos analíticos que se realizó a lo largo del siglo XIX, constituía una aportación dentro de la Química, y la destreza operativa que se exige a todo experimentador, era una cualidad que necesitaba el químico, sin que el analista presentase un carácter diferenciador; al mismo tiempo, la introducción y desarrollo de métodos analíticos se hacía por procedimientos empíricos, contribuyendo, como ya hemos apuntado antes, investigadores de otros campos, principalmente de la Medicina y de la Farmacia.

Desde principios del siglo XIX, la situación fué evolucionando como consecuencia del desarrollo de la industria en Europa, que planteaba problemas de control, solucionables por el análisis químico. Concretamente, fué necesario poner a punto una metodología analítica aplicada exigida por las industrias del hierro y del acero, jabonería, papel y textiles, ácido sulfúrico, fertilizantes, etc.. Al mismo tiempo, como cuenta Irving(7), refiriéndose a la Inglaterra de la segunda mitad del XIX, la polución ambiental y la adulteración de alimentos y medicinas, había llegado a constituir un escándalo público, lo que obligó a establecer normas analíticas y el establecimiento de la figura del "public analyst", equivalente a lo que se llamó en Francia "expertise".

Los más diligentes en la creación de todos los métodos de análisis aplicado que demandaba la sociedad de la época, fueron los alemanes, considerados, como es bien sabido, los adelantados de la industria química mundial; superando a los ingleses, por una serie de causas que han sido estudiadas en detalle por D.H. Aldcroft(15), entre las que destaca la importancia concedida a la investigación, alentada y fomentada por una unión estrecha entre la industria y las universidades. Consecuencia de esto es la abundante bibliografía analítica alemana de la época, de la que he citado ya los títulos más destacados, y haberse fundado allí la primera revista especializada en análisis químico.

Un hecho que debe, también, ser considerado es la aparición, a mediados del siglo XIX, de casas comerciales dedicadas al suministro de material de laboratorio y productos químicos, que se organizaron primero en Alemania. En Inglaterra, la casa Griffiths, editó la segunda edición de su catálogo en 1876; y Gallenkamp, en 1880. Los productos químicos, principalmente ácidos y sales, tenían una calidad muy deficiente, y debían ser purificados previamente a su utilización en los métodos analíticos. En cuanto al instrumental, lo más importante era el vidrio, limitándose los aparatos a balanzas, colorímetros, areómetros, etc., todos ellos de diseño sencillo, pero que constituían todo lo necesario para la realización de

aquellos análisis poco sofisticados, y que respondían a la información simple y algo burda que la química y la industria de la época exigían al análisis; disponiendo, además, el analista de cantidades grandes de muestra. Es importante reflexionar aquí sobre las causas que han motivado e impulsado el desarrollo de la Química analítica. Con una Química eminentemente experimental y una industria escasamente desarrollada; la no limitación de muestra para la práctica de los análisis, ni del tiempo necesario, por disponer de una mano de obra barata; y, al mismo tiempo, la información escasa que se requería, y que puede sintetizarse en las preguntas, ¿qué hay? y ¿cuánto hay?, la metodología analítica, que responde a una función de servicio, era en aquellos primeros tiempos muy sencilla, sin que su aplicación requiriese una formación matemática o física. A medida que todos estos condicionantes van cambiando como veremos en el capítulo siguiente, la Química Analítica se ve obligada a evolucionar, desarrollándose como lo hace toda ciencia, en anchura y en profundidad.

Estas exigencias de control en la industria y en la sociedad, determinó una gran demanda de personas capacitadas para realizar el trabajo de análisis, para lo que se requería sólo un entrenamiento adecuado en los métodos ya sancionados, y habilidad manual para su aplicación a los problemas planteados en cada caso. Surge así la profesión de “analista”, para lo que se requería, tan sólo, una cualificación obtenida por el entrenamiento en un centro o laboratorio adecuado; estos analistas, podían ser ocupados en los laboratorios de las industrias, laboratorios privados de asesoramiento, o investidos de una función oficial de inspección de los artículos de uso o consumo público, como es el caso del “public analyst” en Inglaterra y del “expertise” en Francia.

De la formación de estos analistas, se encargan algunas Universidades y Centros de Enseñanza Técnica, como, también, algunos laboratorios privados, según se puede comprobar en anuncios aparecidos en publicaciones periódicas de la época.

La función de analista, pues, considerada en realidad como una profesión, ejercida por personas sin una formación científica amplia, que practicaban rutinariamente por métodos analíticos que habían aprendido en sus cursos de entrenamiento, convirtió el análisis en un arte, separándose cada vez más de la ciencia química(3). Cuando a finales del siglo XIX, se inició un gran desarrollo de la Físico - Química, los químicos analistas permanecieron ajenos e ignorantes de este movimiento, continuando con su metodología sobre una base empírica, lo que trajo como consecuencia el descrédito académico del análisis y de los analistas(3). Irving(7), abundando en este mismo criterio al referirse a la situación de la Química analítica en el último cuarto del siglo XIX, menciona el abismo que se había abierto dentro de la Chemical Society, creada en el año 1841, entre los denominados “químicos académicos” o químicos teóricos, y el número considerable de químicos prácticos, que podían ser designados bajo la denominación general de “químicos analíticos y consultores”. Es de suponer que estos últimos no se encontrarían muy a gusto en el seno de la Chemical Society, a lo que atribuye Irving

el gran éxito que tuvo la fundación de la "Society of Public Analyst", creada en 1874 para agrupar a todos aquellos que ejercían la profesión de analistas. Es indudable que muchos de los químicos que trabajaron en este campo, alcanzaron renombre en su época, resolviendo, quizás, problemas de transcendencia sanitaria o industrial, cuyos nombres son recogidos por Chirnside y Hamence en su Historia de la Sociedad de Química Analítica(16).

Este concepto sobre el análisis, considerado básicamente como un arte de aplicación, y a los químicos analistas como técnicos, ejerciendo funciones auxiliares dentro del campo de la técnica o de los servicios, continuó durante muchos años. Hasta bien entrado el siglo XX, la enseñanza de la Química Analítica se limitaba a las Escuelas o Universidades Técnicas; y, en las primeras cátedras que se establecieron en las Facultades científicas europeas, se orientaban, todavía, las enseñanzas sobre programas y textos de carácter eminentemente práctico.

## ***II. ESTABLECIMIENTO DE LAS BASES TEÓRICAS DE LOS PROCESOS ANALÍTICOS: CONFIGURACION DEL ANALISIS COMO UNA RAMA DE LA QUIMICA.***

Los importantes progresos experimentados durante la segunda mitad del siglo XIX en el campo de la físico - química, permitían explicar de una forma racional y matemática la mayoría de los procesos químicos en solución. Los avances más importantes en este campo se deben a los noruegos Guldberg y Waage que descubrieron la ley de acción de masas en 1867; al sueco Svante Arrhenius, que formuló la teoría de la disociación electrolítica (1887). Basándose en la teoría de Arrhenius y aplicando la ley de acción de masas, se establecieron los denominados productos de solubilidad y una interpretación del comportamiento de los indicadores ácido-base, de tanta transcendencia en los problemas de la Química Analítica. Otra aportación muy importante fueron los trabajos de Josiah Willard Gibbs, profesor de Física Matemática en la Universidad de Yale, que desarrolló la aplicación de la Termodinámica a la Química, llegando a enunciar la regla de las fases (1873-1878) de tan fecundos resultados en la aplicación del concepto termodinámico del equilibrio en los procesos analíticos.

Todos estos principios básicos, de enorme utilidad para explicar de una forma racional y científica los procesos que constituían la base del análisis, pasaron desapercibidos por los analistas, que persistían en considerar el análisis como una actividad eminentemente práctica, ejercitada por procedimientos semi-empíricos, desdeñando todo planteamiento teórico que consideraban inútil y embarazoso.

Fue Wilhem Ostwald, uno de los padres de la Física-Química, el primero que intentó aplicar los nuevos principios físico - químicos a los procesos de la química analítica, publicando en 1894 su conocida obra "Die wissenschaftlichen Grundlagen der analytischen Chemie"(17) , con el claro propósito de estimular la aplicación de estos principios, sin los cuales la química analítica seguiría condenada a constituir

un servicio. En el pequeño libro de Ostwald, se pueden encontrar algunas ausencias en trabajos e investigadores muy importantes que no son citados, como hace resaltar Kolthoff(3) pero, de todas formas, fué un libro fundamental para concienciar a aquellos que no veían aún con claridad lo que debía ser la química analítica. Al libro de Ostwald, siguieron otras publicaciones orientadas hacia el mismo fin, siendo la más importante la de Walter Herz, profesor de físico - química en la Universidad de Breslau, que en 1907 publica un libro(18) con la misma finalidad que el de Ostwald y que viene a completar el de este último, haciendo una segunda edición en 1922 y, una tercera, en 1930, estas dos notablemente aumentadas y revisadas. Durante estos años, finales del siglo XIX y principios del actual, todos los esfuerzos dirigidos a establecer las bases teóricas del análisis, fueron realizados por físicos y físico-químicos, sin que los considerados especialistas en análisis tomaran parte alguna en estos trabajos. Esto se explica si se considera lo difícil que es cambiar los objetivos y las orientaciones arraigadas en una determinada colectividad, máxime cuando ello exige, como en este caso, una revisión y reestructuración de todos los principios básicos de su trabajo. Es pasada la primera guerra mundial de 1914 - 19, que se generaliza, en los químicos dedicados al análisis, el establecimiento de la Química Analítica como una disciplina derivada de la Química y asentada sobre principios científicos tomados de la Físico - Química. La Química Analítica teórica o básica es, por tanto, una aplicación de la Físico - Química dirigida al establecimiento de los principios y de las leyes que rigen los procesos del análisis.

En este orden, es de justicia citar en primer lugar a Izaak M. Kolthoff, que estudió en la Universidad de Utrech (Holanda), teniendo como profesor de Química Analítica a Nicolas Schoorl, que a su vez había recibido en la Universidad de Amsterdam una sólida formación físico - química del famoso trio van't Hoff, Bakhuis - Rozeboom y Lobry de Bruyn. Es indudable que esta formación teórica inicial, le capacitó y despertó su interés por contribuir a establecer sólidamente las bases de la Química Analítica como ciencia. Trasladado pronto a la Universidad de Minnesota, en los Estados Unidos de Norteamérica, es allí donde ha realizado una labor ingente, reflejada en cerca de mil publicaciones científicas y nueve libros, que han sido reeditados en ediciones sucesivas, en algunos casos en colaboración con otros especialistas, y traducidos a varios idiomas. El profesor Kolthoff, ha constituido para los químicos de mi generación que nos hemos dedicado al análisis, el maestro que ha orientado nuestros estudios y que más ha contribuido a nuestra formación en este campo del análisis. Los trabajos del Profesor Kolthoff se han referido, principalmente, al estudio de los indicadores; termodinámica de las reacciones en solución, tanto en medio acuoso como en disolventes orgánicos; y aplicaciones de la electroquímica y de la polarografía a la resolución de problemas analíticos.

Otro de los primeros libros teóricos sobre los problemas analíticos en solución acuosa, es el publicado en 1914 por el físico danés Niels J. Bjerrum(19) sobre las valoraciones acidimétricas y alcalimétricas; en este libro, Bjerrum

calculaba por primera vez las variaciones del pH en los procesos de valoración, construyendo las denominadas curvas de neutralización, que permiten prever los errores de titulación en los virajes del indicador. Según afirma el mismo Kolthoff(3), el libro de Bjerrum le sugirió el desarrollo de una interpretación teórica de todos los métodos de análisis volumétrico, que dió lugar a la publicación en 1926 de su conocida obra en dos volúmenes, con el título el tomo primero "Die Theorie der Massanalyse", y el tomo segundo, "Die Praxis der Massanalyse", libros que fueron traducidos al inglés, y de los que se han hecho varias ediciones(20). Podría citar aquí a otros varios científicos que, con sus investigaciones o sus enseñanzas en las cátedras universitarias, han contribuido de manera destacada a configurar la Química Analítica como una nueva rama, con entidad propia dentro de la Química. Prefiero, no obstante, citarlos más adelante al referirme concretamente a las técnicas en las que han destacado. Es en estos años, finalizada la primera Guerra Mundial, cuando empieza a introducirse en las Universidades la enseñanza de los principios teóricos de la Química analítica. En 1929, T. B. Smith, profesor en la Universidad de Sheffield (Inglaterra) publica un libro sobre una interpretación físico - química de los problemas analíticos (21), que tiende a servir de guía para el curso de análisis que se explicaba en dicha Universidad. En el prólogo de la primera edición, se hacían determinadas manifestaciones que pueden considerarse como un resumen de las ideas que se aceptaban ya como indiscutibles en aquella época. "El valor y la eficacia que pueda tener un curso en Química Analítica depende en gran medida, de la claridad con que son entendidas las teorías y principios básicos de las operaciones que constituyen la metodología a aplicar en el análisis. Esto se hace más evidente si consideramos el tema desde un punto de vista educacional o formativo, pero es también válido para aquellos que tienden a considerar el análisis desde un punto de vista utilitario. Los procesos analíticos, practicados de una forma elemental o rutinaria, por aquellos que tienen conocimientos teóricos escasos y no comprenden, por tanto, los mecanismos físico - químicos que regulan la operación, puede dar resultados satisfactorios cuando se aplica a muestras homogéneas y en circunstancias muy parecidas. No ocurre lo mismo si los mismos métodos han de ser utilizados con materiales más complejos, o si la información obtenida va a ser utilizada con una finalidad diferente; para que los resultados sean fiables, en estos casos, el analista debe estar capacitado para garantizar la aplicabilidad del proceso, teniendo en cuenta las nuevas circunstancias; y modificando la metodología si fuese necesario".

### **III. DESARROLLO DE NUEVAS TECNICAS ANALITICAS.**

La situación de relativa tranquilidad y simplismo en que se desenvolvía la actividad de los químicos analistas durante el siglo pasado, consecuencia de una industria escasamente desarrollada, y unos problemas limitados y no demasiado

complejos, situación a la que aludí en líneas anteriores, comenzó a cambiar rápidamente en los últimos años del siglo y principios del siguiente. El desarrollo de la industria siderúrgica y metalúrgica, exigía la determinación de un número mayor de componentes y en concentraciones más bajas; la cantidad de muestra disponible para la realización de los análisis se reduce notablemente; en algunos casos, por las limitaciones inevitables en su origen, como ocurre en el estudio de productos naturales y, en otros, porque al reducir la cantidad de muestra, se acortan los procesos necesarios de preparación y tratamiento, que es otro de los condicionantes que se le plantean al analista: obtener la información necesaria que se espera del análisis en un tiempo lo más breve posible. Estas exigencias crecientes en el ritmo de trabajo del analista, se van sumando a la información cada vez más compleja que se pide en los análisis; como hace destacar Meinke(12), y hace suyo, también, Irving(7) no basta ya, en muchos casos, determinar la composición básica o elemental del problema, expresada en forma cualitativa y cuantitativa, sino que es necesario determinar la estructura, distribución espacial y homogeneidad. Más adelante, han ido surgiendo otras complicaciones, como son determinar la fiabilidad de la muestra con que se opera, en función del análisis que se va a realizar; y el tratamiento de datos para su interpretación correcta.

La necesidad de dar solución a todas estas exigencias de las diversas ramas de las ciencias, de la industria y el comercio y de la sociedad en general, trajo como consecuencia un gran desarrollo de la tecnología analítica, entendiendo como tal los fenómenos e instrumental aplicados al análisis; y una metodología mucho más amplia y sofisticada que la que había venido constituyendo el arsenal del químico analista durante todo el siglo XIX, al que he denominado de la química analítica clásica. Este proceso de renovación se intensifica como consecuencia de la Guerra Europea de 1914, tomando parte en su desarrollo, como ocurrió también durante todo el siglo XIX, físicos, químicos - que no se consideraban como analistas por trabajar en un campo más reducido de la química, - bioquímicos, biólogos, ingenieros, etc-. La magnitud del trabajo desarrollado a partir de estas fechas, puede apreciarse en el crecimiento de las publicaciones de las revistas especializadas; en Norteamérica, la "American Chemical Society" no tenía una revista especializada en el análisis, incluyendo los artículos relacionados con esta materia en la publicación titulada "Industrial Engineering Chemistry", que, en el año 1929, fue desglosada, apareciendo la "Analytical Edition" y, posteriormente, fué denominada "Analytical Chemistry".

Resumir de una manera coherente y ordenada toda la inmensa labor realizada durante las cuatro primeras décadas de este siglo, es decir, todo el periodo anterior a la Segunda Guerra Mundial, sería muy difícil y requeriría una extensión que no me puedo permitir en estos momentos. Sin embargo, ajustándome a mi finalidad de dar una idea de lo que es actualmente la Química Analítica, e intentar trazar el perfil de lo que debe ser, a mi juicio, un especialista en esta materia, considero necesario señalar las principales direcciones de investigación que se han seguido en el periodo a que me refiero, y los avances que pueden