



RASC

Real Academia
Sevillana de Ciencias

Algunas notas sobre la investigación matemática y sus aplicaciones

discurso pronunciado por el

Ilmo. Sr. D.

Tomás Domínguez Benavides

en el acto de recepción como académico numerario
el día 21 de noviembre de 1995

y

contestación del académico numerario

Ilmo. Sr. D.

Juan Arias de Reyna Martínez

ALGUNAS NOTAS SOBRE LA INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA Y SUS APLICACIONES

*Discurso pronunciado por el
Ilmo. Sr. D. TOMÁS DOMÍNGUEZ BENAVIDES,
en el Acto de su recepción como Académico Numerario
de la Real Academia Sevillana de Ciencias*

INTRODUCCIÓN

Excelentísimo. Señor Presidente de la Real Academia Sevillana de Ciencias, Excelentísimas e Ilustrísimas Autoridades, Ilustrísimos Señores Académicos, Señoras y Señores:

Quiero que mis primeras palabras sean para dar las gracias a esta ilustre Corporación, por el alto honor que me hace al elegirme para formar parte de ella. Aún mayor es mi agradecimiento al constatar que los posibles méritos, que tan generosamente han considerado para hacer esta elección, no son consecuencia exclusiva de mi trabajo personal, sino fruto de la colaboración que siempre he encontrado en el mundo científico sevillano. Sería injusto conmigo mismo y con quienes me rodean, si en este momento no hago extensivo mi agradecimiento a cuantos, diariamente, me ayudan en esta maravillosa tarea de la investigación científica. Especialmente quiero dar las gracias a mi maestro de Educación Primaria, quien desde la infancia me enseñó que la cultura es el único bien que merece la pena atesorar. Quiero también agradecer al Profesor Arias de Reyna la paciencia que siempre ha tenido para resolver los problemas que le hemos planteado. Su dirección científica ha sido siempre fundamental para el progreso de la investigación en el Departamento de Análisis Matemático.

Cuando fui elegido para formar parte de esta Academia, se encontraba entre sus miembros el Profesor Castro Brzezicki, quién me encaminó por los senderos de la investigación y la docencia, y guió mis pasos durante años, a lo largo de mi carrera científica. Su muerte fue un duro golpe para los que diariamente convivíamos con él, y una pérdida irreparable para esta Institución. Como homenaje a una vida de dedicación total a la Universidad y a la Ciencia y en agradecimiento a las enseñanzas que de él he recibido, quiero dedicarle en este momento un especial recuerdo. Siguiendo su ejemplo intentaré ser digno del honor que esta Corporación me concede.

No somos los matemáticos personas aficionadas a la oratoria. Acostumbrados a expresar nuestras ideas mediante un lenguaje simbólico, conciso y desprovisto de retórica, la solemnidad de este acto nos hace sentirnos como pez fuera del agua. Por ello, la elección de un tema para este discurso ha constituido para mí un difícil reto. Por una parte, la alta cualificación de este auditorio exige un nivel científico adecuado. Por otra parte, la exposición de un tema matemático sin la ayuda de tizas y pizarra es para nosotros de una dificultad casi insuperable. Además, el rigor, que siempre debe presidir nuestros razonamientos, nos lleva a veces a terrenos de una aridez difícilmente soportable incluso por los más pacientes. No es mi intención al iniciar mi andadura en esta Corporación abusar, en este sentido, de la paciencia de tan ilustre auditorio. Por ello he decidido considerar sólo los aspectos de las Matemáticas que tienen mayor repercusión en otras disciplinas, e intentar no caer en un excesivo formalismo, aún a sabiendas de que la consecuente falta de precisión puede decepcionar a algunos de los presentes. Estoy seguro, sin embargo, de que generosamente sabrán perdonarlo.

El objetivo que me he propuesto es resaltar la repercusión que la investigación matemática ha tenido y tiene en otras ciencias. Estoy seguro de que, para muchos de los oyentes, es tan obvia, que puede parecerles una banalidad el tema. No obstante, a partir del año 1800, el desarrollo de las matemáticas puras promovido principalmente por la teoría de números (tema que ha sido de gran actualidad periodística por la presunta demostración del Teorema de Fermat) ha hecho que se cuestione seriamente en el mundo científico si las teorías matemáticas tienen una aplicación práctica o deben entenderse sólo como parte de una teoría general del conocimiento. Mi objetivo es mostrar cómo además de las aplicaciones obvias de aquellas partes de las matemáticas que fueron creadas ex-profeso para apoyar a otras ciencias, pueden obtenerse también aplicaciones de otras partes que a primera vista parecen más alejadas del mundo empírico. Así mismo quiero resaltar aquellas aplicaciones que, por ser tan evidentes, son frecuentemente pasadas por alto, llegando a formar parte tan intrínseca de algunas teorías, que al estudiarlas no llega uno a observar con detenimiento la base matemática que la sustenta, y menos aún los esfuerzos investigadores que se han necesitado para llegar a ella. Vamos a comenzar mostrando un ejemplo en cada una de estas direcciones.

1. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS

1.1. La importancia «real» del número complejo

Mientras que los números reales aparecen como una abstracción de algo con existencia real, y por eso nadie duda de su interés práctico (de hecho el problema del *continuo* ha sido tema tópico y fundamental para la filosofía occidental, incluyendo la arábica medieval), los números complejos aparecen, en cambio, como un «invento» matemático para resolver aquellas ecuaciones algebraicas que «no tienen

solución», y por ello, no es de extrañar, que el significado de estos números en matemáticas, física y ciencias en general, no haya tenido especial relevancia para los filósofos. El propio nombre de números «complejos» y de números «imaginarios», parece ponerlos en el cuarto de los trastos inútiles, sólo de interés para coleccionistas. Sin embargo, estos números han sido usados por los físicos durante más de doscientos años, y a partir del siglo XIX, sus apariciones en física han ido gradualmente alcanzando una extensión tan grande, que podríamos decir que realmente se ha llevado a cabo una «complexificación» de la física. Posiblemente sea en Óptica donde encontramos uno de los ejemplos más simples de la importancia «real» de los números imaginarios. Al estudiar la propagación de la luz en medios contiguos transparentes, Fresnel había establecido que si α y β son los ángulos de incidencia y refracción, verificando

$$\text{sen } \alpha = \mu \text{sen } \beta,$$

la razón de amplitudes de luz incidente y reflejada para la luz polarizada en el plano de reflexión es

$$-\frac{\text{sen } (\alpha - \beta)}{\text{sen } (\alpha + \beta)}.$$

Sin embargo, si $\text{sen } \alpha > \mu$, entonces el ángulo β resulta ser complejo. La anterior razón también es compleja, pero tiene módulo 1, y por tanto representa un desplazamiento de ángulo ω . Fresnel interpretó que esto significaba que había una reflexión total, que las amplitudes de las dos ondas son las mismas, pero que las ondas difieren en su fase por la cantidad ω ya citada. Posiblemente ésta fue la primera vez que los números complejos son puestos en el centro de un contexto interpretativo de la «realidad», y es un hecho extraordinario que esta interpretación, siendo la primera de su clase, permaneciera en pie tras la verificación por experimentos y tras la posterior «Maxwellización» de la teoría. Podríamos, por tanto, decir que ésta fue la primera vez que la Naturaleza fue abstraída de las Matemáticas Puras, esto es, de las Matemáticas que no habían sido previamente abstraídas de la Naturaleza.

1.2. Las funciones no derivables en ningún punto y el movimiento browniano

Es éste otro ejemplo, más sofisticado, de entes matemáticos, al parecer caprichosos e «irreales», pero con aplicaciones «reales». Cuando Weierstrass construyó el primer ejemplo conocido de función continua no diferenciable en ningún punto, mediante la sumación de una serie de funciones, el mundo científico reaccionó con cierta extrañeza, pues acostumbrados a percibir un mundo «suave», la existencia de tal función (aborto de función continua, la llamaba Hermite) parecía una cuestión tan matemática como filosófica. Así de Bois Reymond decía

«Un gran misterio está escondido para mí en la metafísica de la función de Weierstrass, y no puedo dejar de pensar que una intrusión más profunda aquí conducirá a un límite de nuestro intelecto».

En cualquier caso, la construcción de Weierstrass no parecía ir más allá de un mero capricho matemático. Así Poincaré decía sobre ello:

«Hubo una vez en que la creación de una nueva función tenía una motivación práctica. Pero hoy día las funciones son inventadas ingeniosamente, sobre todo para descubrir las incorrecciones en las demostraciones de nuestros padres. Ninguna aplicación diferente a éstas se obtendrá de ellas».

Por una vez Poincaré se equivocó, como demostró otro brillante matemático, Norbert Wiener, quién creó la teoría matemática del movimiento browniano. Recordemos que el movimiento browniano fue descubierto por el botánico Robert Brown, observando con el microscopio granos de polen en suspensión. Posteriormente Einstein demostró que, según la teoría molecular del calor, los cuerpos microscópicos suspendidos en un fluido pueden realizar unos movimientos similares a los llamados brownianos. Einstein y Smoluchowski se preocuparon de qué sucedía a cualquier partícula en un momento determinado, y del comportamiento estadístico de muchas partículas a largo plazo. Sin embargo, no se interesaron por las propiedades matemáticas de la curva seguida por cada partícula singular. En relación a este aspecto, el físico francés Perrin escribió que las curvas muy irregulares seguidas por las partículas en el movimiento browniano hacían pensar en las supuestas curvas continuas no diferenciables de los matemáticos. Wiener demostró que, en un modelo matemático para el movimiento browniano, todas las trayectorias eran curvas continuas no diferenciables, salvo para un conjunto de probabilidad cero. La teoría creada por Wiener es el principio de la teoría de procesos estocásticos, la cual juega un papel muy importante en todas las áreas de ciencias naturales, en tecnología y en economía.

Posiblemente, al pensar en las aplicaciones de la investigación matemática, la tendencia natural podría ser circunscribirse a las Matemáticas comúnmente conocidas como Aplicadas. Los ejemplos anteriores muestran cómo las Matemáticas Puras también son «aplicadas» con éxito para el desarrollo de otras ciencias. Desde luego, la mayor parte de las Matemáticas creadas con un objetivo de aplicación inmediata permanecerán por mucho tiempo. Sin embargo, también es cierto que cuánto más puras son las Matemáticas, más profundamente ocupan lugares preeminentes en el Saber Humano (recuérdese, por ejemplo, a Cantor y a Gödel) y que las aplicaciones más significativas a las ciencias básicas han venido más de matemáticos que han investigado siguiendo sus propios designios, que de los que lo han hecho por requerimiento de otras ciencias.

Dada la gran extensión que tienen las Matemáticas, voy a centrar mi Discurso en el Análisis Matemático, y especialmente en aquellos temas de este área en que he estado más interesado por mi investigación, aunque dada la interconexión existente entre las distintas partes de las Matemáticas (y entre ésta y otras áreas de conocimiento) será difícil no hacer referencias externas.

2. LOS PRIMEROS PASOS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO

En los orígenes del Cálculo Infinitesimal es bien conocida la relación existente entre la investigación matemática y sus aplicaciones en otras ciencias. De hecho, el estudio de las matemáticas no se concebía sin el estudio de las otras ciencias, e incluso podríamos decir que los grandes matemáticos eran sabios universales. Recuérdese que Galileo era físico y filósofo, Pascal era científico y pensador, Leibnitz era filósofo y matemático, Kepler era astrónomo y matemático, Descartes siempre estuvo dividido entre las Matemáticas y la Filosofía y Newton era tan buen físico como matemático, además de excelente gobernador del Banco de Inglaterra. En esta época (y podríamos decir lo mismo en nuestros días) la investigación matemática no se consideraba una profesión sino una afición. Recordemos por ejemplo a la saga de los Bernouilli, de los que Jacques era teólogo, su hermano Jean era médico, al igual que el hijo de éste, Daniel, que además fue profesor de Matemáticas, Botánica, Anatomía y Física. Otro ejemplo de esta afición nos lo proporciona Ricatti, quién declinó la Presidencia de la Academia de Ciencias de S. Petersburgo para poder continuar escribiendo en Italia sobre matemáticas, física y filosofía, pero sobre todo Fermat, quién posiblemente fue el matemático más grande del siglo XVII, famoso también por su desinterés en publicar sus resultados, que son conocidos principalmente por sus cartas a amigos y por anotaciones marginales en los libros que leía. Era jurista de profesión y consejero real en la provincia de Toulouse. Sin embargo, su pasión eran las matemáticas. En 1629 inventó la Geometría Analítica, pero el crédito se lo llevó Descartes, quién publicó sus ideas, análogas a las de Fermat, en 1637. En ese tiempo, trece años antes de que naciera Newton, Fermat descubrió además un método para hallar las tangentes a curvas y sus máximos y mínimos, que equivalía a los rudimentos del Cálculo Diferencial. Newton reconoce, en una carta que no se conoció hasta 1934, que algunas de sus ideas sobre este tema provienen directamente de Fermat. Prueba de la polivalencia de sus conocimientos fue su descubrimiento en 1657 del principio del tiempo mínimo, y su relación con la refracción de la luz, que estableció el primer paso hacia una teoría coherente de la óptica. Desde luego, es bien conocido que fue en la teoría de números donde su genio brilló especialmente, obteniendo importantes resultados y dejándonos la intriga sobre su famoso último teorema, del cual él escribe en el margen de uno de sus libros: «He encontrado una demostración realmente maravillosa que no cabe en este estrecho margen». Precisamente este teorema ha vuelto a ponerse de actualidad por la aparición de una presunta demostración del mismo, hecho que ha trascendido a la opinión pública, y, cosa insólita en el mundo matemático, ha ocupado páginas completas en las rotativas de la prensa cotidiana.

Los primeros pasos en la investigación en Análisis Matemático son impulsados por las necesidades de otras ciencias, que, como hemos mostrado, en la época a que nos referimos formaban todas ellas un saber universal. Así la organización de la Mecánica necesitó la creación de una gran cantidad de Análisis Matemático. El cálculo de variaciones, por ejemplo, surge a impulsos de la Mecánica de Partículas. Otras teorías fueron instigadas por la Mecánica del continuo. La teoría de ecuaciones en

derivadas parciales procede de ahí, especialmente la teoría de ondas. La Mecánica del continuo también creó la mitad del Análisis de Fourier (la otra mitad fue creada por la teoría del calor), y tuvo un papel importante en la aparición de la teoría de tensores, la cual en el siglo XX ha penetrado en varias áreas de las ciencias.

Desde luego, no siempre ha existido esta armonía entre Matemáticas y Física. A épocas de entendimiento y colaboración han sucedido otras de incomprensión cuando estas ciencias hermanas se han declarado la una a la otra inútiles. Esta situación de amor-desamor queda reflejada en el prefacio de la primera edición del libro de Hermann Weyl sobre Teoría de Grupos y Mecánica Cuántica [W]. Dice en él:

No puedo evitar el jugar el papel de intermediario (a menudo mal recibido) en este drama entre matemáticos y físicos, los cuales se alumbran mutuamente en la oscuridad, pero reniegan los unos de los otros cuando están cara a cara.

Esta situación de disputa no ha aparecido hasta los últimos tiempos. En la época de Newton hubiera sido impensable esta falta de armonía. Para comprender esto, basta recordar su obra *Principia*, que es una perfecta conjunción de Física y Matemáticas. Como es bien conocido, en esta obra, entre otras aportaciones, estableció los principios fundamentales de la mecánica teórica y de la dinámica de fluidos; dio el primer tratamiento matemático del movimiento ondulatorio; dedujo las leyes de Kepler de la ley gravitacional del cuadrado inverso, y explicó las órbitas de los cometas; calculó las masas de la Tierra, el Sol y los planetas con satélites; explicó la forma achatada de la Tierra y la utilizó para dar cuenta de la precesión de los equinoccios, y fundó la teoría de las mareas.

3. EL INICIO DE LAS MATEMÁTICAS PURAS

Las primeras dudas sobre la utilidad «práctica» de las matemáticas se iniciaron alrededor de 1800 y fueron causadas por el desarrollo de las matemáticas puras (representadas por la Teoría de Números) y por la aparición de una nueva clase de Física, independiente de las Matemáticas. Nuestros protagonistas son Gauss, como creador de la teoría moderna de números, y Faraday como el inventor de la física sin matemáticas. Aunque anteriormente a Gauss habían hecho aportaciones a la teoría de números científicos tan relacionados con la Física como Fermat, Euler, Lagrange, Legendre y Fourier, a partir de 1800 empieza la especialización con nombres como Kummer, Galois y Eisenstein, quienes fueron fuertemente influidos por el libro de Gauss *Disquisitiones Arithmeticae*. Es curioso que junto a este libro, en el que Gauss inicia las matemáticas puras, otros de sus más famosos libros tratan sobre teorías creadas para resolver problemas prácticos. Recordemos, por ejemplo, a título de anécdota, que, a finales del siglo XVIII, muchos astrónomos buscaron un nuevo planeta entre las órbitas de Marte y Júpiter, donde la ley de Bode (1772) sugería que podía estar localizado. El primero y más grande de los planetas menores, conocidos como asteroides, fue descubierto en esa región en 1801, y bautizado como Ceres. Este descubrimiento coincidió irónicamente con una sorprendente publicación del filósofo-

fo Hegel, en la que reprochaba a los astrónomos su desconocimiento de la filosofía: esta ciencia, decía, podría haberles evitado malgastar sus esfuerzos, demostrándoles que ningún nuevo planeta puede existir. Por desgracia, el pequeño planeta era difícil de observar bajo las mejores circunstancias, y pronto se perdió su pista en el luminoso cielo, cerca del Sol. Los astrónomos intentaron sin éxito su localización durante meses. Finalmente, Gauss se sintió atraído por el reto, y con ayuda de su método de mínimos cuadrados y su incomparable facilidad para el cálculo numérico determinó la órbita, indicó a los astrónomos dónde debían apuntar sus telescopios y, en efecto, allí estaba Ceres. Posteriormente Gauss produjo un flujo permanente de trabajos sobre temas astronómicos, de los que su *Theoria Motus corporum coelestium* fue la biblia de los astrónomos planetarios durante un siglo, con cuyos métodos pudieron descubrir Neptuno. Es curioso también destacar que otra de las grandes obras de Gauss, su artículo *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, en el que creó la geometría diferencial intrínseca de superficies curvadas arbitrarias, surge a partir de un estudio geodésico que le encargó el gobierno de Hannover. Podemos, pues, decir que Gauss marca la división entre las Matemáticas como una ciencia universal y las Matemáticas como una unión de disciplinas especiales, y entre el «geómetra» como el «sabio» universal en el sentido del siglo XVIII y el matemático especializado de los tiempos modernos. De él podemos decir, sin embargo, que pertenece a las dos categorías: era universal y especialista.

Los progresos de la Física en este siglo, especialmente la Mecánica Cuántica, dieron lugar a que matemáticos y físicos nuevamente trabajaran al unísono. Pero esto nos lleva inevitablemente al hecho más importante que ha sucedido en la historia del Análisis Matemático después de la creación del Cálculo Infinitesimal: la aparición del Análisis Funcional.

4. EL ANÁLISIS FUNCIONAL: SUS ORÍGENES Y SU RELACIÓN CON LA MECÁNICA CUÁNTICA

Aunque ya al final del siglo XIX se venían gestando los espacios de funciones (recuérdense los trabajos de Weierstrass), corresponde al siglo XX el inicio, de una forma sistemática, del Análisis Funcional. Y desde luego no surgió como una abstracción caprichosa, sino que vino impulsado por una necesidad de resolver problemas clásicos que, a finales del siglo XIX y principios del XX, ocupaban la atención de los matemáticos. Así el concepto de espacio métrico aparece de alguna forma implícito en trabajos relacionados con el Cálculo de Variaciones. Según Hadamard [Ha], tuvo su origen hacia 1897 cuando Weierstrass, en unas conferencias, dio una definición analítica de proximidad entre dos funciones. Este concepto fue, a principios del siglo XX, formalizado por Frechet [Fr], y, a pesar de ser sus definiciones extensiones lógicas de trabajos previos, tuvieron una influencia tan grande en las Matemáticas actuales, que incluso el estilo de éstas sigue fuertemente influido por la obra de Frechet. Aunque a nuestros ojos podría parecer que sus conceptos y de-

mostraciones son rutinarias, ello es debido únicamente a que su teoría se ha tomado como base de las Matemáticas modernas. Los otros pilares fundamentales sobre los que se apoya el Análisis Funcional son los conceptos de espacio de Hilbert y de espacio de Banach. También ellos surgen, dentro de un proceso evolutivo de las Matemáticas, con un claro objetivo de resolver ecuaciones integrales o ecuaciones en derivadas parciales motivadas por problemas físicos.

4.1. La obra de Hilbert como ejemplo de investigación matemática

Posiblemente la obra de Hilbert [H] sea la mejor guía que podamos encontrar para conocer los objetivos que debe perseguir la investigación matemática. Hilbert no pretendía crear nuevas teorías por el mero hecho de hacerlo, sino que cada artículo suyo iba dirigido a la resolución de un problema concreto, de los muchos que en ese momento estaban planteados entre los matemáticos importantes de la época. Las siguientes palabras, tomadas de unas notas biográficas de Hilbert escritas por Otto Blumenthal, nos aclararán mucho mejor en qué sentido y con qué amplitud se desarrolla la obra de este gran matemático:

«Para conocer los grandes logros de Hilbert en el campo del Análisis, es necesario comentar primero el estado de éste a finales del siglo XIX. Después de que Weierstrass había fundamentado la teoría de funciones complejas, la investigación había girado a los problemas de contorno, los cuales provienen de la física. El trabajo de Riemann sobre teoría de funciones complejas había mostrado, sin embargo, que los problemas de contorno también tienen gran importancia para las matemáticas puras. Había que resolver dos problemas:

(i) el problema de la existencia de una función potencial para valores de contorno dados; y

(ii) el problema de las oscilaciones de cuerpos elásticos, por ejemplo, cuerda y membrana.

La situación era algo confusa al final del siglo diecinueve. Riemann había creído que, usando el principio de Dirichlet, se podrían tratar estos problemas de una forma simple y uniforme. Después de la crítica sustancial de Weierstrass al principio de Dirichlet, tenían que ser desarrollados métodos especiales para estos problemas. Estos métodos, de C. Neumann, Schwarz, Poincaré, (...) a causa de su variedad eran muy confusos (...). Faltaban «hechos básicos simples» de los que pudieran deducirse resultados sin sofisticados procesos de límites.

Hilbert buscó estos «hechos básicos simples» primero en el Cálculo de Variaciones. Consideró los llamados problemas variacionales regulares que satisfacen la condición de Legendre. En 1900 tuvo un inmediato y gran triunfo: consiguió justificar el principio de Dirichlet.

Mientras Hilbert usaba métodos variacionales, Fredholm se acercaba al mismo objetivo, desarrollando el trabajo de Poincaré, usando ecuaciones integrales. En 1901 Holmgren, que venía de Uppsala para estudiar con Hilbert en Göttingen, dio una

conferencia sobre el trabajo de Fredholm en ecuaciones integrales que había sido publicado un año antes [Fh]. Este fue un día decisivo en la vida de Hilbert; tomó el descubrimiento de Fredholm y lo combinó con sus métodos variacionales. Así consiguió crear una teoría uniforme que resolvió los problemas (i) y (ii) anteriores.(...) Hilbert creía que con esta teoría había provisto al análisis de una base general correspondiente a una axiomática de procesos límites. El desarrollo posterior de las Matemáticas ha probado que llevaba razón».

4.2. La influencia de la Mecánica Cuántica

La utilidad de los espacios de Hilbert es muy clara cuando se intenta dar una base matemática a la Mecánica Cuántica. Esta impone una indeterminación en la dualidad posición-momento: la determinación de uno de ellos implica la indeterminación del otro. Esta exclusión nos obliga a describir el estado de una partícula, en lugar de, por unas coordenadas concretas, por una función de cuadrado integrable, cuya integral representa la probabilidad de que el estado se encuentre entre los de un conjunto fijado. El espacio fase no será, por tanto, $\mathbb{R}^n$ sino un espacio de Hilbert. Los axiomas de esta teoría nos dicen además que toda cantidad medible es representada por un operador lineal A actuando sobre el espacio prehilbertiano y, si ϕ es una autofunción de A con autovalor λ , la cantidad A es supuesta tener, en el estado ϕ , el valor λ .

A partir de 1926 Hilbert encontró la ayuda de otro matemático de gran calidad: John von Neumann. La colaboración investigadora entre ambos y la nueva luna de miel entre matemáticos y físicos queda reflejada en las siguientes palabras de Dieudonné:

«Eran los años en los que la Mecánica Cuántica se desarrollaba a una velocidad de vértigo, apareciendo nuevas ideas cada pocas semanas y desde todas partes. Los físicos teóricos que estaban desarrollando la nueva teoría necesitaban herramientas matemáticas adecuadas, tratando sucesivamente con matrices infinitas sin ninguna consideración sobre su convergencia, operadores diferenciales, «matrices continuas» (sea cual sea su significado), etc. (...). Finalmente resultó que sus «observables» tenían propiedades similares a los operadores hermíticos de los espacios de Hilbert y que, por una extraordinaria coincidencia, el «espectro» de Hilbert (un nombre que había elegido aparentemente por una analogía superficial) iba a ser el concepto central para explicar el «espectro» de los átomos. Fue por tanto natural que pidieran ayuda a Hilbert para intentar dar sentido matemático a sus cálculos. Con la ayuda de von Neumann, Hilbert probó con operadores integrales en L^2 , pero eso necesitaba del uso de la función δ de Dirac, un concepto que para los matemáticos de ese tiempo era contradictorio en sí mismo. Von Neumann decidió por consiguiente probar con otro método.»

Viendo la necesidad de extender los trabajos de Riesz sobre operadores acotados al caso de los no acotados, Von Neumann encontró la clave para hacerlo en un libro

de Carleman [C] sobre operadores integrales con núcleo singular. Sin embargo, cuando su trabajo estaba a punto de ser publicado, Schmidt le hizo ver el papel que podría jugar en la teoría el concepto de operador adjunto y la importancia que podrían tener los operadores autoadjuntos. Abandonando el método de Carleman, y usando, en cambio, la transformada de Cayley, reescribió su artículo [N] en una forma mucho más satisfactoria, dando una teoría espectral completa para los operadores simétricos cerrados y para los operadores autoadjuntos.

No quiero que de estas palabras se interprete que la Mecánica Cuántica debe su existencia a la base matemática que la sustenta. El desarrollo de la Mecánica Cuántica ha sido posible por el enorme refinamiento de las técnicas experimentales, que han permitido una visión casi directa del interior de los procesos atómicos. No nos corresponde a nosotros hablar de estas técnicas experimentales, pero sí expresar nuestro respeto al trabajo del científico experimental y a su lucha por arrancar los secretos más significativos de la Naturaleza.

4.3. La obra de Banach y la escuela polaca de análisis funcional

Como ya hemos indicado, junto con los espacios de Hilbert, los espacios de Banach conforman los pilares sobre los que se asienta el análisis funcional. La obra de Banach, sin quitar ninguna relevancia a su figura, aparece enmarcada dentro de la extraordinaria labor desarrollada por la escuela polaca de matemáticas. Otra vez las investigaciones que dan lugar a la fundamentación del análisis funcional surgen a partir de unos intentos de resolver problemas clásicos. El propio título de la Tesis Doctoral de Banach «*Sur les opérations dans les ensembles abstraites et leur applications aux équations intégrales*» es suficientemente indicativo. Según palabras de Mazur

La publicación de esta Tesis en la revista «Fundamenta Mathematica» en 1922 es una fecha crucial en la historia de las matemáticas del siglo XX, pues esa disertación de varias docenas de páginas proporciona las bases definitivas del análisis funcional, el cual (como se ha demostrado por la investigación de Banach y otros) es de capital importancia no sólo para el posterior desarrollo de las matemáticas sino también de las ciencias, en general, y de la física, en particular.

En su monografía de 1929 [Ba] Banach construyó una teoría unificada con sus propios resultados fundamentales y otros anteriores y posteriores, algunos de los cuales habían sido obtenidos por sus discípulos. En poco tiempo, la monografía de Banach llegó a ser un clásico y fundamental tratado sobre análisis funcional, dando fama a su autor de ser uno de los más distinguidos matemáticos del mundo y gran prestigio para sus colaboradores y discípulos. El centro matemático de Lwów, donde Banach desarrollaba su labor, se convirtió en el centro más importante de análisis funcional del mundo.

El éxito y la proyección exterior de este centro debe ser compartido también por Hugo Steinhaus. A él se debe fundamentalmente el interés de esta escuela por las

aplicaciones de la investigación matemática. Ya antes de la segunda guerra mundial, Steinhaus había publicado un número importante de artículos en Teoría de Probabilidad. Fué también un precursor de la Teoría del Juego (esto ha sido generalmente olvidado o desconocido fuera de Polonia, por lo que el mérito de la creación de esta teoría ha sido atribuido a otros autores). En la postguerra Steinhaus continuó preocupándose de las aplicaciones de las matemáticas a los más diversos campos, escribiendo artículos sobre temas tan variados como dispersión de leucocitos, costes de suministros eléctricos, investigación de patrimonio, estimación de vetas mediante pruebas de perforación, antropología, etc. A lo largo de su vida Steinhaus se fue comprometiendo cada vez más con las aplicaciones de las matemáticas, atrayendo a ese trabajo a un grupo numeroso de matemáticos jóvenes y elaborando métodos de cooperación entre expertos en diferentes disciplinas. Teniendo en cuenta los antiguos y modernos estilos de tal cooperación, llegó a la conclusión de que ésta debe ser realizada según un «principio orgánico», esto es, los expertos deben discutir el origen, sentido e importancia de un problema. Además no se debe empezar a cooperar cuando el problema está formulado sino mucho antes. Hay problemas tales que otros científicos no llegan a entenderlos como un problema matemático, e inversamente, otras veces el matemático no obtiene ninguna utilidad de las aplicaciones de técnicas matemáticas sofisticadas. En cualquier caso, el matemático debe dedicar mucho tiempo y atención al estado preparatorio del trabajo; no debe esperar que otros científicos lleguen a una formulación matemática del problema, sino que deben trabajar junto a ellos en esa formulación.

Aunque sea salimos un poco del tema, merece la pena destacar que este tipo de cooperación entre científicos de diferentes disciplinas fue puesto en práctica en España por D. Julio Rey Pastor con la creación del Instituto de Cálculo en el que colaboró activamente el Profesor Castro. En él se realizaron trabajos sobre temas muy variados: resolución de todo tipo de ecuaciones, cálculos numéricos variados, construcciones de tablas y otros de aplicaciones concretas como: cálculo de presas y estructuras variadas, proyectos de vías de comunicación, de lentes ópticas; estudio de economía de mercados, Biometría, Física nuclear, Hidrología.

5. TEOREMAS DEL PUNTO FIJO Y SUS APLICACIONES

Aunque desde sus comienzos, y durante mucho tiempo, el Análisis Matemático, y dentro de él, el Análisis Funcional, tanto en su desarrollo como en sus aplicaciones, tuvo un carácter marcadamente lineal, no podemos ignorar otros tipos de problemas en los que prevalecen los aspectos no lineales, y es en este marco donde nosotros hemos encuadrado principalmente nuestra investigación. A pesar de lo que ha dado en llamarse «el maravilloso comportamiento lineal del universo» una gran cantidad de fenómenos reales no son lineales, esto es, por decirlo de una forma fácilmente comprensiva, la suma de las causas no implica necesariamente la suma de los efectos. Aunque desde un punto de vista local el problema puede linealizarse,

el comportamiento global puede estar fuertemente influido por los términos no lineales.

Uno de los problemas más importantes que se presentan en el Análisis Funcional No Lineal es resolver una ecuación del tipo

$$f(x) = y$$

para alguna función f definida en un conjunto X y con imagen en ese mismo conjunto. De la dificultad de este problema puede servir de indicación el hecho de que, incluso en los casos más simples de ser X el conjunto de números reales y f una función tan regular como queramos, es difícil asegurar la existencia de una tal solución y mucho más aún el calcularla. Desde luego, definiendo una nueva función g por $g(x) = x + f(x) - y$ el anterior problema se transforma en el de encontrar x tal que $g(x) = x$, o sea, encontrar un punto transformado en él mismo por la función g , o expresado más simplemente, encontrar un punto fijo de g . A partir del Teorema del Punto Fijo de Brouwer [B], esta teoría se ha desarrollado extensamente en muy variadas direcciones, aunque justo es reconocer que nadie ha obtenido un teorema del punto fijo tan perfecto como el de Banach, que garantiza la existencia de solución y su unicidad, indica el método iterativo para obtenerla, permite acotar fácilmente el error en cada paso de la iteración y además tiene una demostración extraordinariamente sencilla. Tan importante es este teorema y lo son sus aplicaciones, que ha pasado a ser tema común en los estudios de Licenciatura. Después de este teorema, conocido clásicamente como el Principio de la Aplicación Contractiva, han ido surgiendo un número tan considerable de teoremas del punto fijo que se necesitarían meses para describirlos todos. La mayor parte de ellos están condenados a permanecer en el olvido, pero otros, por su importancia, ya tienen nombre propio. Matemáticos como Schauder, Kakutani, Fan, Darbo, Browder, Sadovskii,... serán por mucho tiempo citados por los estudiosos de estos temas. Las aplicaciones inmediatas de estos teoremas son bien conocidas: existencia y unicidad de solución de ecuaciones diferenciales y ecuaciones funcionales, existencia de soluciones periódicas. Pero sus aplicaciones teóricas y prácticas van, a veces, mucho más allá de lo que en un principio cabría esperar.

5.1. El teorema de Markov-Kakutani y la representación de grupos

Recordemos que el teorema de Markov-Kakutani [K] asegura la existencia de un punto fijo común para una familia de aplicaciones. Aunque, a primera vista, podría interpretarse como un inútil intento de complicar el problema básico del punto fijo, sin embargo este teorema permite establecer la existencia de una medida de Haar invariante a la izquierda sobre grupos compactos. Esta medida de Haar es necesaria para la demostración del crucial teorema de Peter-Weyl sobre representación de grupos compactos. Recordemos que una representación de un grupo compacto G es un

homomorfismo de G en el grupo de matrices invertibles de orden N , o más generalmente, un homomorfismo de G en un grupo de operadores lineales y continuos definidos en un espacio de Hilbert o Banach. La teoría de la representación es a su vez crucial para la descripción de fenómenos físicos: división de las líneas espectrales en campos magnéticos y eléctricos, tabla periódica de los elementos, comportamiento físico de los cristales, vibración molecular, etc. Es fascinante que las representaciones de $SU(3)$, el grupo de matrices unitarias de orden 3 y determinante 1, conduzcan a fórmulas sobre el comportamiento de las masas de los mesones, las cuales están estrechamente de acuerdo con los datos experimentales. La $SU(n)$ clasificación de las partículas elementales también conduce a las hipótesis sobre la existencia de quarks (un protón consiste en tres quarks con cargas de $+2/3$ o $-1/3$ de la carga del protón). Hoy en día se están haciendo intentos, mediante el uso de los espacios fibrados y los grupos $SU(n)$, de construir una teoría unificada de las partículas elementales que incluya todas las interacciones.

5.2. El teorema de Kakutani y su aplicación a la Economía

Otro ejemplo similar de aplicaciones mucho más tangibles y prácticas que las que, a primera vista podrían ser imaginadas, es el caso del Teorema de Kakutani a la Economía. Recordemos que el Teorema de Kakutani [K] es una clásica generalización del Teorema del Punto Fijo de Brouwer [B] al caso de aplicaciones multivaluadas. Nuevamente podríamos pensar que su interés no va más allá de ser una lógica generalización. Sin embargo, otra vez nos equivocáramos al hacer esta consideración. El teorema de Kakutani permite demostrar el Teorema de Fan y Glikberg [F,G], referente también a la existencia de puntos fijos para aplicaciones multivaluadas. A su vez éste permite demostrar el Teorema Fundamental de las Matemáticas Económicas de Gale, Nikaido y Debreu, que garantiza la existencia de un equilibrio de Walras. Explicado de un modo informal esto significa lo siguiente: Supongamos que hay n productos G_i , con su precio p_i correspondiente. A cada n -pla de precios le asignamos el conjunto de todas las posibles diferencias entre producción y demanda para los productos G_i vendidos al precio p_i . De esta manera el producto escalar del vector formado por los precios p por el vector formado por las diferencias entre producción y demanda es igual a la diferencia entre el valor de los productos suministrados al mercado y el valor de los productos que son demandados por el mismo. Si este producto escalar fuera nulo, estaríamos en la situación ideal en que la producción es igual que la demanda; pero esta situación no siempre puede ser conseguida, y tendremos que conformarnos con un resultado más débil que éste. Así, es razonable aceptar la llamada ley de Walras, que significa que sólo consideramos situaciones económicas en las que hay exceso de suministros. Decimos que un punto es un punto de equilibrio de Walras si la diferencia entre la oferta y la demanda es mínima. El problema fundamental de las Matemáticas Económicas es determinar condiciones sobre la aplicación S que mide el exceso de producción, de forma que se garantice la existencia

de un equilibrio de Walras. Una adecuada aplicación del Teorema de Fan-Glikhsberg a una función multivaluada que se obtiene a partir de la función exceso S permite obtener, sin apenas dificultad, condiciones que resuelven el anterior problema básico de la Economía.

5.3. Aplicaciones no-expansivas

Finalmente, y dada la importancia teórica y práctica de los teoremas del punto fijo, voy a indicar cómo una parte de nuestra investigación se ha dirigido hacia éstos, y más concretamente a los que conciernen a las aplicaciones no expansivas. Son éstas aplicaciones lipschitzianas cuya constante de Lipschitz toma el valor 1. Es bien conocido que, para estas aplicaciones, no es válido el Teorema del Punto fijo de Banach, incluso para aplicaciones tan simples como una traslación en R con su métrica usual. Este hecho debió dar lugar a que durante más de 40 años no se avanzara nada en la formulación de teoremas del punto fijo para estas aplicaciones. Sin embargo en 1965 apareció un resultado fundamental en esta teoría: Browder [Br] prueba que si X es un espacio de Hilbert, C un subconjunto de X convexo, cerrado y acotado y $T:C \rightarrow C$ es noexpansiva, entonces T tiene algún punto fijo. Tanto las hipótesis sobre C , (propias de los teoremas de punto fijo basados en la compacidad, como el teorema de Schauder) como las técnicas de demostración usadas por Browder resultaron sorprendentes y enormemente innovadoras. El mismo autor observa en el mismo año que su demostración es igualmente válida si sólo se exige a X ser uniformemente convexo (concepto definido por Clarkson 20 años antes). Vemos así como una propiedad geométrica de los espacios de Banach, tradicionalmente usada en Análisis Funcional Lineal, es ahora empleada en un tema tan típico del Análisis Funcional no Lineal, como es la existencia de puntos fijos. A partir de estos resultados se plantean de forma natural tres cuestiones básicas:

- (a) Buscar otras propiedades geométricas de los espacios de Banach (además de la convexidad uniforme) que permitan formular teoremas del punto fijo para aplicaciones no expansivas.
- (b) Encontrar resultados similares para otros tipos importantes de aplicaciones, más generales que las no expansivas.
- (c) En aquellos espacios en que el teorema no se verifica, determinar cuántas son las aplicaciones que no lo hacen.

Cronológicamente hemos abordado estos problemas en el orden inverso al señalado. El problema (c): ¿Qué tamaño tiene la familia de aplicaciones libres de punto fijo en un subconjunto convexo, cerrado, acotado e invariante de un espacio de Banach arbitrario?, nos obliga a precisar en qué sentido se va a medir el tamaño de tal familia. Hay varias formas matemáticas de hacerlo: en un espacio de medida es claro que la propia medida de un conjunto nos da una indicación muy razonable sobre su tamaño; en un espacio topológico de Baire serán las correspondientes categorías las que pueden darnos tal indicación y, finalmente, en un conjunto arbitrario siem-

pre queda el recurso de observar su cardinalidad. Así por ejemplo en $\mathbb{R}$ podemos considerar pequeños tanto a los conjuntos de medida cero, como a los de primera categoría, o a los numerables. Estas tres nociones de tamaño no son equivalentes y pueden aparecer entrelazadas como sucede en un trabajo [D11] nuestro de 1986, en el que probamos que el conjunto de ceros de casi todas las funciones reales continuas (en el sentido de las categorías) que toman valores de signo opuesto es de medida de Lebesgue nula y cardinalidad del continuo. Para los problemas de punto fijo, al estar dentro de un espacio métrico completo, las categorías de Baire parecen la «medida» más adecuada. En base a ellas hemos obtenido diversos resultados que, «a grosso modo», vienen a decir que la familia de funciones con mal comportamiento (esto es, aquéllas que no tienen punto fijo, o que éste no es accesible mediante aproximaciones sucesivas o que no garantizan solución para problemas de valores iniciales o de contorno en diferentes tipos de ecuaciones diferenciales o ecuaciones funcionales) es de tamaño despreciable, frente a aquéllas que tienen un comportamiento adecuado. Este tipo de resultados es conocido como genérico y tuvo su origen cuando en 1932 el matemático polaco Orlicz [O] probó la unicidad genérica de solución al problema de Cauchy para una ecuación diferencial en $\mathbb{R}^n$. Es de destacar que el primer autor español que obtuvo resultados de tipo genérico fue el Profesor Castro [Ca], quien en un trabajo publicado en el año 1949, definiendo pseudotopologías en un conjunto de series de Dirichlet, estudia en forma genérica, el problema de la prolongabilidad. Es de destacar que en este trabajo usa técnicas modernas, muy poco conocidas en España en aquella época, pues aunque los primeros resultados genéricos de W. Orlicz fueron publicados en los años treinta, hasta el final de los sesenta, en que resurgen con ímpetu las teorías genéricas, no obtuvieron los trabajos de éste una amplia difusión. Los resultados genéricos han sido tema de controversia en los últimos tiempos. Como ejemplo podemos citar un trabajo de G. Sell [S], quien fue mi director durante mi estancia en la Universidad de Minnesota, en el que prueba que en «casi todos» los campos gravitacionales y bajo hipótesis razonables es posible el rescate de un satélite espacial. La objeción que surge ante este resultado es lógicamente ¿qué sucede si nuestro campo gravitacional pertenece al conjunto de tamaño despreciable en el que el rescate no es posible? Un defensor de las teorías genéricas diría: «Sería muy mala suerte, pero después de todo es muy poco probable». Desde luego esta respuesta no sería muy satisfactoria para los que hayan nacido en ese mundo de campo gravitacional inadecuado. Sin embargo hay algo en las teorías genéricas que es irrefutable: estos resultados pueden ser aplicados para probar otros de carácter universal. Esto sucede en el ejemplo anterior, puesto que directamente puede probarse que, si el campo gravitacional es casi periódico, no puede pertenecer al conjunto de los inadecuados. Esta confluencia de intereses de mis directores en España y en Estados Unidos hacia los problemas genéricos nos llevó a ocuparnos durante un tiempo de estos problemas. Además del trabajo citado de 1986, publicamos durante los años 1981 a 1985 diversos resultados [D4 a D10] sobre existencia genérica de solución o de solución periódica para ecuaciones diferenciales en espacios de Banach o en escalas de estos espacios, y sobre propiedades genéricas

relacionadas con la existencia de punto fijo de ciertos tipos de operadores no lineales. La dificultad que surge debido a la no equivalencia entre las distintas consideraciones de tamaño puede ser resuelta en parte mediante el uso del concepto de porosidad en lugar de categoría de Baire. En esta dirección hemos obtenido recientemente algunos resultados [D18].

En cuanto al segundo problema antes citado, hemos investigado propiedades del punto fijo de los operadores condensantes. Los resultados obtenidos nos permitieron publicar de 1978 a 1980 diversos artículos [D1,D2,D3] en los que se estudia la construcción de sistemas dinámicos para ecuaciones diferenciales no autónomas, y algunos teoremas de existencia o dependencia continua de valores iniciales para ecuaciones diferenciales implícitas en espacios de Banach. A partir de 1986 retomamos el tema de los operadores condensantes obteniendo resultados [D12,D13, D14 y D20] de comparación entre operadores contractivos para distintas medidas de no compacidad basados en las propiedades geométricas de los espacios de Banach en que están definidos. Esta utilización de resultados del Análisis Funcional Lineal en la Teoría de Operadores No lineales ha sido también nuestra principal herramienta en los resultados que hemos obtenido en relación con el problema (a), antes citado, de determinar aquellos espacios en los que sus subconjuntos convexos, cerrados, acotados e invariantes tienen la propiedad del punto fijo para aplicaciones no expansivas, problema que ha centrado nuestra investigación en los últimos años. Ya en 1965 Kirk [Ki] utilizó la noción de estructura normal, concepto que había sido usado por Milman 20 años antes en relación con problemas de Análisis Funcional Lineal, para obtener teoremas de punto fijo. Puesto que la existencia de tales puntos depende de las propiedades del espacio de Banach específico que consideremos, en el estudio de estos problemas enlazan la Teoría Geométrica de espacios de Banach, y la Teoría de Operadores no Lineales. La determinación cuantitativa de constantes características del espacio que permitan asegurar la propiedad del punto fijo, y la relación entre los valores de estas constantes y las propiedades geométricas del espacio han sido los objetivos de nuestros últimos trabajos [D15, D16, D17, D19 y D21].

CONCLUSIÓN

No quiero extenderme más exponiendo los aspectos prácticos. Sólo he tratado de dar algunas indicaciones de cómo la investigación matemática no se limita a un complicado juego del intelecto, sino que, por el contrario, el progreso en Matemáticas no puede, de ninguna forma, ser desligado del progreso del resto de las ciencias y del progreso de la humanidad. Como podemos leer en el libro de Arthur Jaffe *Ordenando el Universo: El papel de las Matemáticas*, éstas han sido desde el principio el más esotérico, pero también el más práctico de los saberes humanos. Ya en 1800 a.C. los babilonios investigaron las propiedades abstractas de los números; y en Grecia la Geometría alcanzó el más alto status intelectual. Junto a los conocimientos teóri-

cos, las Matemáticas fueron consideradas como una herramienta diaria para la navegación y para los trabajos de ingeniería pública. Los problemas teóricos y prácticos se estimularon entre sí de forma que no es posible establecer una separación entre ellos. Gran parte de esta situación se reproduce hoy en día. Así, en el siglo XX las Matemáticas han ampliado enormemente sus horizontes, su complejidad y su abstracción. Tan profunda ha sido esta explosión que áreas enteras de las Matemáticas pueden parecer ininteligibles para el hombre de la calle, o incluso para los matemáticos que trabajan en otras áreas; a pesar de esto, las matemáticas han llegado a ser más concretas y vitales que nunca y en el último cuarto de siglo se han convertido en una componente esencial de las ciencias, la tecnología y la economía. En nuestra sociedad, altamente tecnificada, las personas sin una formación matemática elemental encuentran dificultades similares a las que antaño podrían encontrar los analfabetos. De hecho, podemos decir que nuestra cultura ha sido «matematizada». Retomando frases de von Newmann [N2] podemos decir:

En las modernas ciencias empíricas cada vez se considera un mayor éxito el que ellas lleguen a ser accesibles a los métodos matemáticos o a los métodos casi matemáticos de la física. En efecto, a través de las ciencias naturales una cadena ininterrumpida de sucesivas pseudomorfosis, todas ellas presionando hacia las matemáticas, y casi identificadas con la idea de progreso científico, se ha hecho cada vez más evidente. La Biología es invadida cada vez más por la Química y la Física, la Química por la Física teórica y experimental y la Física por las formas muy matemáticas de la Física teórica.

Espero que estas palabras puedan servir para despejar algunas dudas sobre la utilidad de esta investigación, y para que los jóvenes asistentes se sientan animados a emprender la ardua tarea de obtener nuevos resultados, con la ilusión puesta en la repercusión que pueden tener en el progreso de las ciencias. Desde luego el tema que he tratado no admite el análisis riguroso de una ciencia exacta, sino que representa sólo un conjunto de notas y opiniones personales. Para aquellos que difieran de esta idea de la utilidad de la investigación matemática acabaré leyendo unas palabras del insigne escritor sevillano Alberto Lista (a quién mi maestro, el Profesor Castro, tanto admiraba) en su Discurso sobre la utilidad del estudio de las ciencias exactas pronunciado en el colegio S. Felipe Neri de Cádiz:

Yo no creo que pueda existir una verdad absolutamente estéril, y contrayéndonos a los conocimientos matemáticos, no sé de ninguno del que no se hayan hecho o puedan hacerse aplicaciones útiles. Pero aún cuando concediese la imposibilidad de hacer útil en las artes algún teorema; aún cuando tuviera seguridad de que jamás pueda producir bienes materiales a los hombres, no por eso le miraría yo como infecundo, porque para eso sería necesario que yo negase el placer que produce al hombre la contemplación de la verdad.

REFERENCIAS

- [Ba] S. Banach. *Théorie des opérations lineaires*. Varsovia 1932
- [B] L. Brouwer. *Beweis der Invarianz der Dimensionszahl*. Math. Ann. 70, 161-165 (1911).
- [Br] F. E. Browder. *Nonexpansive nonlinear operator in a Banach space*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 54, 1041-1044 (1965).
- [C] T. Carleman. *Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique*. Uppsala 1923.
- [Ca] A. de Castro. *Sobre las series de Dirichlet prolongables y no-prolongables*. Gaceta Matemática 1949.
- [D1] T. Domínguez Benavides *An existence theorem for implicit differential equations in a Banach space*. Ann. Mat. Pura ed Appl. vol. CXVIII, 119-130 (1978).
- [D2] T. Domínguez Benavides. *Dynamical system for a non-autonomous differential equation with α -Lipschitz operator*. J. Diff. Eq. 34 (2), 230-238 (1979).
- [D3] T. Domínguez Benavides *Continuous dependence for implicit differential equations in Banach spaces*. Collect. Math. XXXI (3), 205-216 (1980).
- [D4] T. Domínguez Benavides. *Aplicaciones de las categorías de Baire a la existencia de solución de una ecuación diferencial en un espacio de Banach*. Real Acad. Ci. Ex. Fi. Nat. de Madrid, LXXV (1), 263-271 (1981).
- [D5] T. Domínguez Benavides. *Índice genérico del punto fijo para aplicaciones no- α -expansivas*. Actas de las IX Jornadas {Matemáticas} Hispano-Lusas, 265-268. Salamanca (1982).
- [D6] T. Domínguez Benavides. *Generic existence of solution for a differential equation in a scale of Banach spaces*. Proc. Amer. Math. Soc. 86 (3), 477-484 (1982).
- [D7] T. Domínguez Benavides. *Generic existence of a non-empty compact set of fixed points*. J. Math. Anal. Appl. 90 (2), 421-430 (1982).
- [D8] T. Domínguez Benavides. *Some generic properties of non- α -expansive operators*. J. Math. Anal. Appl. 105 (1), 176-186 (1985).
- [D9] T. Domínguez Benavides. *Some topological properties of the 1-set-contractions*. Proc. Amer. Math. Soc. 93 (2), 252-254 (1985).
- [D10] T. Domínguez Benavides. *Generic existence of periodic solutions of differential equations in Banach spaces*. Bull. Acad. Pol. Sci. 32, 129-135 (1985).
- [D 11] T. Domínguez Benavides. *How many zeros does a continuous function have?* Amer. Math. Monthly 93 (6), 464-465 (1986).
- [D12] T. Domínguez Benavides. *Some properties of the set and ball measures of noncompactness and applications*. J. London Math. Soc. 34 (2), 120-128 (1986).
- [D13] T. Domínguez Benavides. *Set-contractions and ball-contractions in some classes of spaces*. J. Math. Anal. Appl. 136 (1), 131-140 (1988).
- [D14] T. Domínguez Benavides; J.M. Ayerbe. *Set-contractions and ball-contractions in L_p -spaces*. J. Math. Anal. Appl. 159 (2), 500-506 (1991).
- [D15] T. Domínguez Benavides; G. López Acedo. *Fixed points of asymptotically contractive mappings*. J. Math. Anal. Appl. 164 (2), 447-452 (1992).
- [D16] T. Domínguez Benavides. *Normal structure coefficient in L_p spaces*. Proc. Royal Soc. Edinburgh 117A, 299-303 (1991).
- [D17] T. Domínguez Benavides; G. López Acedo. *Lower bounds for normal structure coefficients*. Proc. Royal Soc. Edinburgh 121A, 245-252 (1992).
- [D18] J. Carmona Alvarez; T. Domínguez Benavides. *Porosity and k -set-contractions*. Boll. Un. Mat. It. 6A, 227-232 (1992).
- [D19] J.M. Ayerbe; T. Domínguez Benavides. *Connections between some Banach space coefficients concerning normal structure*. J. Math. Anal. Appl. 172(1), 53-61 (1993).
- [D20] T. Domínguez Benavides; R.J. Rodríguez. *Some geometric coefficients in Orlicz sequence spaces*. Nonlinear Anal. 20(4), 349-358 (1993).
- [D21] T. Domínguez Benavides. *Weak uniform normal structure coefficients in product spaces*. Studia Math. 103(3), 283-290 (1992).

- [F] K. Fan. *Fixed-points and minimax theorems in locally convex spaces*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 74, 4749-4751 (1952).
- [Fr1] M. Frechet. *Sur quelques points du Calcul fonctionnel*. Rendiconti Circolo Mat. Palermo 2, 1-74 (1906).
- [Fr2] M. Frechet. *Sur les ensembles des fonctions et les opérations lineaires*. C. R. Acad. Sci. Paris 144, 1414-1416 (1907).
- [fh] I. Fredholm. *Sur una nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet*. Kong. Vetenskaps-Akademiens Forh. Stokholm, 39-46 (1900).
- [G] I. Glicksberg. *A further generalization of the Kakutani fixed-point theorem with applications to Nash equilibrium points*. Proc. Amer. Math. Soc. 3, 1170-1174 (1952).
- [Ha] J. Hadamard. *Leçons sur le Calcul des Variations*. Hermann: Paris 1910.
- [H] D. Hilbert. *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*. Teubner: Leipzig y Berlin (recopilación de seis artículos) (1912).
- [K] S. Kakutani. *A generalization of Brouwer fixed-point theorem*. Duke Math. J. 8, 457-459 (1941).
- [Ki] W. A. Kirk. *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances*, Amer. Math. Monthly 72, 1004-1006 (1965).
- [Or] W. Orlicz. *Zur Theorie der Differentialgleichungen $y' = f(t, x)$* . Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. A, 221-228 (1932).
- [N] J. von Neumann. *Allgemeine Eigenwerttheorie hermitescher Funktionaloperatoren*. Math Ann. 102, 49-131 (1929).
- [N2] J. von Neumann. *The Mathematician*. In: The works of the mind. University of Chicago Press, 180-196 (1947).
- [R] F. Riesz. *Über lineare Funktionalgleichungen*. Act. Math. 41, 71-98 (1918).
- [S] G. R. Sell. *Generic Theories in the qualitative study of ordinary differential equations*. Boll.Un. Mat. It.(4),11, 182-188 (1975).
- [W] H. Weyl. *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*. Dover: New York 1950.

DISCURSO PRONUNCIADO POR EL ILMO. SR. D. JUAN ARIAS DE REYNA MARTÍNEZ

*Académico Numerario,
en contestación al leído por el
Ilmo. Sr. D. TOMÁS DOMÍNGUEZ BENAVIDES,
en el Acto de su recepción como Académico Numerario
celebrado el día 21 de Noviembre de 1995*

Señoras y señores:

Debo comenzar recordando a nuestro querido profesor D. Antonio de Castro, al que habría correspondido dar la contestación al discurso de ingreso en esta Academia Sevillana de Ciencias del Prof. Domínguez Benavides. D. Antonio me guió durante toda mi carrera científica y su muerte ha sido una pérdida irreparable. De seguir aún entre nosotros, estaría hoy aquí dando esta contestación al que fue también su antiguo alumno, compañero y amigo.

En primer lugar hablaré sobre los méritos del Prof. Domínguez. Comenzó los estudios de Licenciatura en Matemáticas en el curso 1968/69 después de haber quedado finalista en la V Olimpiada Matemática. Acabó estos estudios en el año 1973, en que recibió el Premio Extraordinario de Licenciatura, alcanzando un accésit al Premio Nacional Fin de Carrera. En el mínimo tiempo legal leyó su Tesis Doctoral, realizada bajo la dirección del Prof. Castro, sobre la teoría de los Sistemas Dinámicos, obteniendo el Premio Extraordinario de Doctorado.

Recuerdo de aquellos años su interés por el libro del Prof. Sell de la Universidad de Minnesota. Ese interés derivó en una estancia de un curso académico en dicha Universidad. Fué el primer matemático formado en Sevilla que estuvo en una Universidad extranjera incrementando sus conocimientos. Fruto de esta estancia en la Universidad de Minnesota es su dedicación a los temas cercanos a las Ecuaciones Diferenciales. Pero no son estos primeros temas de investigación los que quiero destacar en su labor investigadora.

Sus trabajos estan centrados alrededor del Teorema del Punto Fijo. Cuando se busca algo: un lugar, una idea, ... procedemos a veces por aproximaciones sucesivas; así llega una carta a su destino. Los matemáticos a este proceso lo llamamos teorema del punto fijo de Banach. El nombre de punto fijo viene de que consideramos la transformación que de una posición dada nos lleva a otra más próxima: lo que se

busca es un punto fijo para esta transformación, es decir, una solución de la ecuación $x = T(x)$. Banach es uno de los matemáticos que dió a esta idea una formulación precisa.

No es que los matemáticos nos empeñemos en la precisión, es que en este tema es fundamental. Por ejemplo, busquemos un número natural mayor que todos, para lo que usamos el operador que transforma cada número en su siguiente. Todos los números tienen un siguiente y lo que estamos buscando es la solución de la ecuación $x = x + 1$. Pero no existe tal número; el método de aproximaciones sucesivas no sirve en este caso.

Recuerdo que D. Antonio nos contaba que este Teorema de Banach, del que había tenido conocimiento en Italia, fue el tema de su lección magistral en una de las oposiciones a las que concursó. Esta novedad causó una gran impresión en el tribunal y en los contrincantes. Yo mismo tuve conocimiento de este teorema por un apéndice de uno de los libros de texto que D. Antonio escribió. Recuerdo que al leerlo me vino a la mente que este método de aproximaciones sucesivas era el mismo que Santo Tomás usó en sus intentos de demostrar la existencia de Dios: toda cosa tiene su causa, luego ha de haber algo que sea su propia causa.

El mérito de Banach fué dar unas condiciones muy generales bajo las cuales se puede concluir la existencia del objeto buscado. Eso es lo que hizo también Brower. Y eso es lo que lleva tantos años haciendo el Prof. Domínguez Benavides. Para encontrar condiciones de validez del método de aproximaciones sucesivas es necesario hacer un estudio geométrico de diversos espacios. Es en este campo donde se enmarcan sus trabajos más sobresalientes.

Con respecto a su carrera docente, tengo que decir que Tomás ha impartido la mayor parte de las asignaturas adscritas al departamento de Análisis Matemático, principalmente en las licenciaturas de Matemáticas y Física. Esta labor docente ha atraído a muchos alumnos, que con el tiempo han llegado a ser profesores. Ha creado de este modo un equipo de investigación, cuyo prestigio es reconocido internacionalmente.

Paso a la contestación de su discurso de ingreso. Nos ha expuesto, con gran claridad, cómo las aplicaciones han acompañado a la Matemática durante todo su desarrollo, cómo las partes aparentemente más alejadas de la realidad han sido también, en su momento, aplicadas en las formas más sorprendentes. Recuerda esto lo que el físico Wigner denomina la sorprendente aplicación de las matemáticas. Hace notar Wigner que hay un tipo de aplicación de las matemáticas que consiste en deducir las consecuencias de las leyes fundamentales. Es natural esperar que las matemáticas jueguen en esto un papel predominante, puesto que podemos considerarlas como la maquinaria lógica que nos sirve para desarrollar las consecuencias de unas hipótesis. Pero hay otro tipo de aplicaciones matemáticas que Wigner considera poco menos que milagrosas. Son aquéllas que se producen en el momento en que se formulan las teorías físicas, y ocurren cada vez que se formulan dichas teorías.

Por ejemplo: Newton, cuando establece la teoría de la gravitación, sólo dispone de unas observaciones con una precisión muy limitada (Wigner estima que del 4 %)

y, sin embargo, al formularla matemáticamente, obtiene una teoría que es exacta con una precisión de una diez milésima de un 1 %. ¿Qué guía a Newton para obtener una teoría tan excelente? Parece que sólo el deseo de que la teoría tenga elegancia matemática. Este ejemplo se repite en Maxwell; Einstein; Born, Jordan y Heisenberg; etc. En cada uno de estos casos la historia es más sorprendente pues se utilizan cada vez conceptos matemáticos más sofisticados.

Esta observación de Wigner creo que tiene una explicación lógica: La matemática es el estudio de lo coherente, de lo consistente. Lo que existe, existe por ser consistente. Gran parte de los teoremas de la matemática son teoremas de existencia; los matemáticos nos pasamos la vida considerando la posibilidad de existencia de las más diversas estructuras. La matemática trata estos problemas concentrándose en la estructura profunda de los conceptos y olvidándose de los detalles. Esto es lo que la hace aplicable a tantas situaciones.

Las relaciones entre la *realidad matemática* y el *mundo físico* es un problema filosófico muy complejo, pero es innegable que las matemáticas nos muestran que hay unas limitaciones muy fuertes a la existencia. El mundo físico existe, y no puede por tanto escapar a estas limitaciones: son estas limitaciones las que explican que, al expresar matemáticamente las teorías físicas, éstas ganen en precisión respecto de las medidas que las sugieren.

En muchas ocasiones se ha repetido el hecho de que los físicos se han encontrado ya desarrollada la matemática que necesitan. Ocurrió con el cálculo tensorial y la relatividad, el espacio de Hilbert y la mecánica cuántica, y, muy modernamente, en la teoría de campos y los conceptos de geometría diferencial. En alguno de estos casos, como en el de la mecánica cuántica, la existencia previa de los conceptos matemáticos fue imprescindible para que la teoría fuera formulada. Si los matemáticos hubieran atendido sólo a las aplicaciones no habrían desarrollado estos conceptos.

Es este un aspecto de las aplicaciones que no debe olvidarse: la ciencia no debe estar supeditada al aspecto práctico inmediato, por la simple razón de que nadie es capaz de predecir cuáles serán en el futuro las necesidades prácticas.

Consideremos, por ejemplo, la investigación que ha rodeado al estudio del cáncer, sin duda una de las grandes aventuras de la humanidad en el presente siglo, ya que hemos empezado a comprender el mecanismo de la vida. Este conocimiento es, desde mi punto de vista, tan importante como la curación de la enfermedad. Es la curiosidad científica la que ha movido a estos investigadores, pero la financiación ha venido, en muchas ocasiones, por la posible utilidad de estas investigaciones para la curación del cáncer, lo cual no creo que haya beneficiado a la ciencia; habría sido mejor que los investigadores no hubieran tenido que simular, en muchas ocasiones, que sus investigaciones podían tener una repercusión directa en la curación del cáncer.

Si nos hubiéramos atendido al interés inmediato, estos fondos, dedicados a la investigación del cáncer, deberían haberse dedicado al estudio de los factores de riesgo y a medios preventivos, utilizando la experiencia de cómo se evitaron en las so-

ciudades modernas las plagas de la Edad Media. Las enfermedades infecciosas en el siglo XIX comenzaron a declinar como causas principales de muerte debido a las mejoras en el abastecimiento de aguas y alimentos, y a unas condiciones de vivienda y trabajo mas dignas. La reducción del número de personas fallecidas por causa de estas enfermedades no se debió al tratamiento médico, sino a programas públicos de salud que evitaron el contagio.

Sin dejar de reconocer que, probablemente, estas consideraciones prácticas son correctas, como científico creo que no se han malgastado los fondos. El conocimiento adquirido ha sido ya de gran utilidad y seguirá siéndolo en el futuro; nos ha explicado mucho sobre lo que somos y lo que podemos llegar a ser. Creo que esto no ha sido tirar el dinero. Este siglo ha sido particularmente importante para la biología. Había un reto perenne que podía ser resuelto ahora. No vale plantear que el reto se contesta o no dependiendo de su utilidad.

Me parece tan obvio que el conocimiento, en general, y el matemático, en particular, tiene y tendrá siempre aplicaciones, que no voy a tratar de explicar esto. Es más importante explicar que las matemáticas, hoy, tienen también sus retos particulares, tanto o más interesantes que los de la biología o la física. Alguien quedará sorprendido por estas palabras mías. Para explicarlo diré que creo que las últimas preguntas sobre lo que somos los humanos puede que tengan mucho que ver con algunos problemas que hoy día tiene planteados las matemáticas.

La financiación de la ciencia debe estar dirigida por la importancia de las ideas científicas y no por el interés de las posibles aplicaciones.

Las aplicaciones son importantes, pero nunca serán el verdadero motor de la ciencia. Como dijo el gran matemático Poincaré ([2, p. 20]):

El sabio no estudia la naturaleza porque sea útil, la estudia porque encuentra placer, y encuentra placer porque es bella.

REFERENCIAS

- [1] D. L. Davis y H. P. Freeman, *An Ounce of Prevention*, Scientific American, Septiembre 1994, 96-96.
- [2] H. Poincaré, *Ciencia y método*, Espasa-Calpe, Madrid (1962).
- [3] H. Poincaré, *El valor de la ciencia*, Espasa-Calpe, Madrid (1963).
- [4] E. G. Wigner, *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences*, Comm. Pure Appl. Math., 13, 1960, 1-14.